

Zelluläre Approximation von Abbildungen

Konrad Völkel

19. Juni 2008

1 Zelluläre Approximation von Abbildungen

1.1 Motivation

Wir wollen beweisen, dass die n -ten Fundamentalgruppen von S^k für $n < k$ verschwinden. Dazu müssen wir zeigen, dass Abbildungen der Form $S^n \rightarrow S^k$ für $n < k$ nullhomotop sind. Dazu beweisen wir den zellulären Approximationssatz, nach dem jede Abbildung von CW-Komplexen zu einer zellulären homotop ist, d.h. einer Abbildung die k -Zellen ins k -Gerüst abbildet. Im Beweis dieses Satzes braucht man als technisches Hilfsmittel die simpliziale Approximation von I^n , um mit dieser Zusatzstruktur Eigenschaften linearer Abbildungen nutzen zu können. Das ist nötig, da eine stetige Abbildung durchaus die Dimension erhöhen kann (raumfüllende Kurven).

Vorraussetzungen

Lemma 1 (Proposition A.1). *Ist X ein CW-Komplex und $A \subset X$ kompakt, so existiert ein endlicher Unterkomplex $B \subset X$ mit $A \subset B$.*

Definition 2. Ein Raum (X, x_0) heißt n -zusammenhängend, wenn $\forall i \leq n : \pi_i(X, x_0) = 0$ ist. Ein Paar (X, A, x_0) heißt n -zusammenhängend, wenn $\forall 0 < i \leq n : \pi_i(X, A, x_0) = 0$ und $\pi_0(X, x_0) = 0$ ist.

0-Zusammenhang ist Wegzusammenhang, 1-Zusammenhang ist einfacher Zusammenhang. Insbesondere impliziert n -Zusammenhang stets $n - 1$ -Zusammenhang.

Lemma 3 (Kompression). *Für topologische Paare (X, A) ist äquivalent zum n -Zusammenhang: Für alle $0 < i \leq n$ und alle Abbildungen $f : (D^i, \partial D^i) \rightarrow (X, A)$ existiert eine zu f über Abbildungen der Form $(D^i, \partial D^i) \rightarrow (X, A)$ homotope Abbildung $g : D^i \rightarrow A$ und X ist wegzusammenhängend.*

Definition 4. Seien X, Y CW-Komplexe. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **zellulär**, wenn n -Zellen in k -Zellen mit $k \leq n$ abgebildet werden, d.h. $\forall k \in \mathbb{N} : f(X^k) \subseteq Y^k$.

Definition 5. Ein endlicher Simplizialkomplex ist ein Paar (E, K) wobei E endlich, $K \subseteq \mathcal{P}(E)$ stabil unter Teilmengenbildung ist und $\forall e \in E : \{e\} \in K$ gilt. Elemente von E heißen Ecken, Elemente von K heißen Simplizes. Ein Simplex mit $n + 1$ Elementen heißt n -dimensional. Man kann sich einen n -dimensionalen Simplex in den \mathbb{R}^{n+1} eingebettet vorstellen, indem man den n -dimensionalen Standardsimplex mit den Ecken e_1, \dots, e_{n+1} wählt. Damit macht man aus dem Simplizialkomplex einen topologischen Raum als Teilraum von \mathbb{R}^{n+1} - dieser heißt Polyeder von (E, K) .

Bemerkung 6. Für eine Abbildung $f : S \rightarrow \mathbb{R}^k$ auf einem Simplicialkomplex S können wir eine Abbildung $g : S \rightarrow \mathbb{R}^k$ definieren, die **stückweise Linearisierung** von f , indem wir $g(v) = f(v)$ für alle Ecken v des Simplicialkomplexes festlegen und für jeden Teilsimplex S' mit den Ecken (v_0, \dots, v_i) und jede Konvexkombination $\sum_{j=0}^i \lambda_j v_j \in S'$ definieren:

$$g \left(\sum_{j=0}^i \lambda_j v_j \right) := \sum_{j=0}^i \lambda_j g(v_j).$$

So ist g die lineare Fortsetzung der Einschränkung von f auf die Eckenmenge von S , eine stückweise lineare Abbildung.

1.2 Stückweise Linearisierung

Lemma 7 (Lemma 4.10). *Sei W ein topologischer Raum und $Z := W \cup_{\varphi_\alpha} D_\alpha^k$ der Raum W mit einer angefügten k -Zelle e_α^k sowie $f = f_0 : I^n \rightarrow Z$ eine Abbildung. Dann ist f homotop relativ $f^{-1}(W)$ zu einer Abbildung $f_1 : I^n \rightarrow Z$, für die es einen Polyeder $K = K_1 \subseteq I^n$ gibt, sodass*

1. $f_1(K) \subset e_\alpha^k$ und $f_1|_K$ ist stückweise linear für eine Einbettung $e_\alpha^k \rightarrow \mathbb{R}^k$.
2. Es existiert eine nichtleere offene Menge $U \subset e_\alpha^k$ sodass $f_1^{-1}(U) \subset K$.

Die Grundidee ist, dass lineare Abbildungen die Dimension nicht erhöhen können und daher eine Abbildung $e^k \rightarrow e^{k+1}$ zu einer nichtsurjektiven homotopiert werden kann. Nach dem Beweis werden wir sehen, wie man damit eine Homotopie zu einer Abbildung ins k -Gerüst finden kann. Der zweite Teil ist deswegen nicht selbstverständlich, weil bei der Wahl $U := B_{\frac{1}{2}}$ etwa nicht unbedingt $f|_{f^{-1}(U)}$ stückweise linear sein muss.

Beweis. Wir identifizieren $e^k = \mathbb{R}^k$. Seien $B_1 := B_1(0)$, $B_2 := B_2(0) \subset e^k$ die offenen Bälle vom Radius 1 und 2 um den Ursprung und $\overline{B_1}, \overline{B_2}$ ihre Abschlüsse. Da $f_0^{-1}(\overline{B_2})$ abgeschlossen und beschränkt ist, ist es kompakt in I^n , also ist f auf $f_0^{-1}(\overline{B_2})$ gleichmäßig stetig und es folgt direkt:

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0 \forall x, y \in f_0^{-1}(\overline{B_2}) : d(x, y) < \varepsilon \implies d(f_0(x), f_0(y)) < \frac{1}{2}.}$$

Wir merken uns so ein ε .

Zerlege das Intervall I in Segmente vom Durchmesser θ . Dabei betrachten wir die induzierte Zerlegung Z_θ^n von I^n und wählen θ so klein, dass jeder Würfel $Q \in Z_\theta^n$ der Zerlegung in einen Ball von Durchmesser kleiner ε passt, d.h. $\theta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.

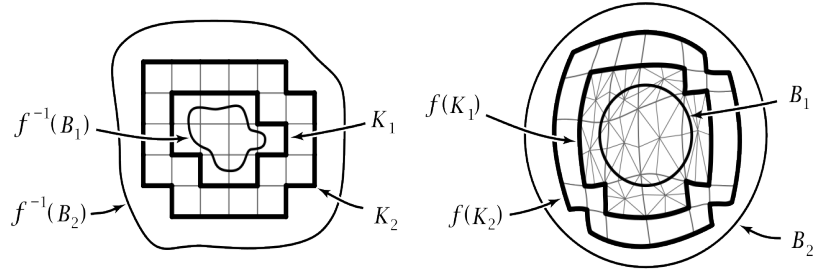
Seien nun K_1 und K_2 folgendermaßen definiert (Skizze!):

$$\boxed{K_1 := \bigcup \{Q \in Z_\theta^n : Q \cap f_0^{-1}(\overline{B_1}) \neq \emptyset\}, K_2 := \bigcup \{Q \in Z_\theta^n : Q \cap K_1 \neq \emptyset\}.}$$

Nach Konstruktion der K_i ist damit

$$\boxed{\varepsilon < \frac{d(f_0^{-1}(\overline{B_1}), I^n \setminus f_0^{-1}(\overline{B_2}))}{2},}$$

und es gilt $f_0^{-1}(\overline{B_2}) \supset K_2$.



Im nächsten Schritt zerlegen wir alle Würfel aus K_2 induktiv in Simplexes: Einzelne Punkte sind Simplexes der Dimension 0, Linien die zwei Punkte verbinden sind Simplexes der Dimension 1 und ein Würfel der Dimension i kann in Simplexes zerlegt werden, wenn sein Rand, der aus Würfeln der Dimension $i - 1$ besteht, bereits in Simplexes zerlegt ist, dann verbindet man nämlich jeden dieser Randsimplexes mit dem Mittelpunkt des i -dimensionalen Würfels und erhält durch diese Kegel eine simpliziale Zerlegung. Durch vollständige Induktion definiert man so eine simpliziale Zerlegung jedes Würfels.

Sei $g : K_2 \rightarrow e^k = \mathbb{R}^k$ definiert als die stückweise Linearisierung von f_0 auf dem eben definierten Simplizialkomplex. Damit ist g stückweise linear.

Sei $\varphi : K_2 \rightarrow [0, 1]$ definiert durch $\varphi(v) := 1$ auf allen Ecken $v \in K_1$ und $\varphi(w) := 0$ auf allen anderen Ecken $w \notin K_1$ sowie Linearität auf allen Simplexes. Dann ist insbesondere $\varphi(K_1) = 1$ und $\varphi(\partial K_2) = 0$.

Definiere eine Homotopie $f_t : K_2 \rightarrow e^k$ durch

$$f_t := (1 - t\varphi)f_0 + (t\varphi)g,$$

es ist dann wie erwartet $f_0 = f_0|_{K_2}$ und es gilt

$$f_1(x) = f_0 - \varphi(x)f_0(x) + \varphi(x)g(x)$$

und nach Konstruktion von φ folgt

$$f_t|_{K_1}(x) = (1 - t)f_0 + tg, \quad f_t|_{\partial K_2}(x) = f_0$$

also ist f_t auf K_1 die lineare Homotopie von f_0 nach g (damit ist f_1 auf K_1 stückweise linear), und auf ∂K_2 die konstante Homotopie - diese Homotopie lässt sich daher konstant ausdehnen von K_2 auf I^n .

Nun ist $f_0 : I^n \rightarrow Z$ relativ $I^n \setminus K_2$ ($\supseteq f^{-1}(W)$) homotop zu $f_1 : I^n \rightarrow Z$; Ausserdem ist (1) $f_1(K_1) \subset e_\alpha^k$ und $f_1|_{K_1}$ ist stückweise linear.

Es ist noch (2) die Existenz einer nichtleeren offenen Menge $U \subseteq e_\alpha^k$ mit $f_1^{-1}(U) \subset K_1$ zu zeigen:

$C := f_1(\overline{I^n \setminus K_1})$ ist Bild einer kompakten Menge. Angenommen, $0 \notin C$, dann existiert eine offene Menge $U \subseteq \overline{B_1}$ um 0, die disjunkt zu C ist, denn C ist abgeschlossen, da \mathbb{R}^n hausdorffsch.

Nach Konstruktion der Homotopie f_t ist $f_1 = f_0$ auf $\overline{I^n \setminus K_2}$ und $f_t^{-1}(\overline{B_1}) \subset K_2$, also ist $f_1(I^n \setminus K_2) \cap \overline{B_1} = \emptyset$. Es ist also $f_1^{-1}(U) \subset K_1$.

Nun beweisen wir noch $0 \notin C$ (Skizze!):

Wir betrachten einen Simplex $\sigma \subset K_2 \setminus K_1$, also einen Simplex im Streifen zwischen ∂K_1 und ∂K_2 (beachte die Wahl von ε) sowie sein Bild $f_0(\sigma) \subset (\overline{B_2} \setminus \overline{B_1})$. Nun gibt es einen Ball B_σ von Radius $\frac{1}{2}$ mit $f_0(\sigma) \subset B_\sigma$.

Da B_σ konvex ist, ist $g(\sigma) \subset B_\sigma$, also nach Konstruktion von f_t auch $f_t(\sigma) \subset B_\sigma$ für alle t , insbesondere für $t = 1$. Wir wissen, dass $B_\sigma \not\subset \overline{B_1}$, da σ Punkte ausserhalb K_1 , somit ausserhalb

$f_0^{-1}(\overline{B_1})$ enthält. Der Durchmesser von B_σ ist aber halb so groß wie der von B_1 , somit ist $0 \notin B_\sigma$, daher ist $0 \notin f_1(\sigma)$.

Da das für alle Simplizes dort gilt, ist $0 \notin C$. □

1.3 Zelluläre Approximation

Satz 8 (Theorem 4.8). *Seien X, Y CW-Komplexe und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist f homotop zu einer zellulären Abbildung $f_1 : X \rightarrow Y$. Wenn f auf einem Unterkomplex $A \subseteq X$ bereits zellulär ist, kann die Homotopie f_t auf A konstant gewählt werden, d.h. $f_t|_A = f$.*

Um das zu beweisen, verwenden wir vollständige Induktion über die Dimension und bearbeiten im Induktionsschritt nacheinander jede Zelle im n -Gerüst mit Hilfe des vorigen Lemmas.

Beweis.

Induktionsanfang: Betrachten wir $f|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y$. Jede Zelle e_α^k ist wegzusammenhängend, also gibt es von jedem Punkt darin einen Weg in den Rand, damit auch eine Homotopie von $f|_{X_0}$ derart, dass ein Bildpunkt auf einen Zellenrand verschoben wird. Damit kann nun ein gegebener Bildpunkt mittels Homotopie auf eine Nullzelle verschoben werden, also für $f|_{X_0}(x_0) = y \in Y$ ist dann $g : X_0 \rightarrow Y$ mit $f|_{X_0} \simeq g$ und $g(x_0) = y_0 \in Y_0$ gegeben. Dieses Verfahren lässt sich mit allen Nullzellen nacheinander durchführen, man erhält hierbei eine evtl. unendliche Verkettung von Homotopien von $f|_{X_0}$ zu $g' : X_0 \rightarrow Y$ mit g' zellulär.

Die hierbei auftretenden evtl. unendlich vielen Homotopien können gleichzeitig ausgeführt werden, setze

$$h^0 : X_0 \times I \rightarrow Y \quad h^0_{|e_i^0 \times I} := \text{Homotopie für die } i\text{-te Zelle, die den Rest festhält.}$$

Da die Ränder der Zellen sogar fest bleiben und zwei Zellen gleicher Dimension disjunkt sind, greift die schwache Topologie des CW-Komplexes und h^0 ist tatsächlich stetig. Das funktioniert so genauso in höheren Dimensionen, das brauchen wir dann auch im Induktionsschritt.

Da das CW-Paar (X, X_0) nach Proposition 0.16 die Homotopieausdehnungseigenschaft hat, kann man die gegebene Homotopie von f nach g' auf X_0 ausdehnen zu einer Homotopie von f nach \tilde{g} auf ganz X , wobei $\tilde{g}|_{X_0} = g'$ ist.

Induktionsannahme: f ist auf X^{n-1} zellulär.

Induktionsbehauptung: $f = f_0$ ist homotop zu einer auf X^n zellulären Abbildung f_1 , wobei die Homotopie auf X^{n-1} stationär ist.

Induktionsschritt: Sei $e_\alpha^n \subset X^n$ eine n -Zelle von X . Es ist $\overline{e_\alpha^n}$ kompakt, denn die charakteristische Abbildung $\Phi_\alpha : D^n \rightarrow X^n$ bildet die kompakte Menge D^n auf $\overline{e_\alpha^n}$ ab. Nach Proposition A.1 liegt eine kompakte Teilmenge eines CW-Komplexes in der Vereinigung endlich vieler Zellen. Sei $e_\beta^k \subset Y^k$ eine k -Zelle, die zu $f(e_\alpha^n)$ nichtleeren Schnitt hat, wobei das k maximal gewählt sei (dieses Maximum gibt es wegen der Endlichkeit). Wenn $k \leq n$ ist, so ist f zellulär auf e_α^n , denn dann sind alle Zellen, die $f(e_\alpha^n)$ schneiden in Y^k und damit $f(e_\alpha^n) \subset Y^k \subset Y^n$.

Wir betrachten den Fall $k > n$. Uns interessieren drei Abbildungen:

$$f' := f|_{X^{n-1} \cup e_\alpha^n} : X^{n-1} \cup e_\alpha^n \rightarrow Y^k, \quad \Phi_\alpha : I^n \rightarrow X^n,$$

$$g := f' \circ \Phi_\alpha : I^n \rightarrow X^{n-1} \cup e_\alpha^n \rightarrow Y^k =: Z$$

Mit $W := Y^k \setminus e_\beta^k$ ist g eine Abbildung, wie sie im Lemma vorkommt.

Diese Abbildung ist homotop relativ $g^{-1}(W)$ zu einer Abbildung $g_1 : I^n \rightarrow Z$, für die es einen Polyeder $K \subseteq I^n$ gibt, sodass

1. $g_1(K) \subset e_\beta^k$ und $g_{1|K}$ ist stückweise linear für eine Einbettung $e_\beta^k \rightarrow \mathbb{R}^k$.
2. Es existiert eine nichtleere offene Menge $U \subset e_\beta^k$ sodass $g_1^{-1}(U) \subset K$.

Da $\Phi_{\alpha|I^{n^\circ}}$ Homöomorphismus ist, ist $(\Phi_{\alpha|I^{n^\circ}})^{-1} : e_\alpha^n \rightarrow I^{n^\circ}$ stetig und

$$f_t := (\Phi_{\alpha|I^{n^\circ}})^{-1} \circ g_t : e_\alpha^n \rightarrow Y^k \text{ eine Homotopie mit } f_0 = f'|_{e_\alpha^n},$$

es gibt also eine Erweiterung von f_t auf $X^{n-1} \cup e_\alpha^n$ - wir nennen sie auch f_t . Die Homotopie f_t ist relativ X^{n-1} , denn g_t ist eine Homotopie relativ $g^{-1}(W) = X^{n-1}$.

Das Bild von f_1 schneidet die offene Menge U aus dem Lemma in der Vereinigung endlich vieler Hyperebenen von Dimension $\leq n$, denn auf $f_1^{-1}(U) \subset K$ ist f_1 stückweise linear. Da $k > n$ ist, gibt es Punkte in e_β^k , die nicht im Bild von f_1 liegen. Sei $p \in e_\beta^k$ so ein Punkt. Wir wissen, dass S^{n-1} Deformationsretrakt von $D^n \setminus \{0\}$ ist, mit Hilfe von charakteristischen Abbildungen also, dass es eine Deformationsretraktion $d_t : Y^k \setminus \{p\} \rightarrow Y^k \setminus e_\beta^k$ gibt, also haben wir auch eine Homotopie $f'_t = d_t * f_t : X^{n-1} \cup e_\alpha^n \rightarrow Y^k$ mit $f_0 = f'$ und $f_1(e_\alpha^n) \cap e_\beta^k = \emptyset$, diese Homotopie ist auch relativ X^{n-1} .

Wiederholt man diesen Prozeß endlich oft, ist $f(e_\alpha^n)$ disjunkt zu allen Zellen von Dimension größer n . Macht man dies nun für alle n -Zellen e_θ^n , jeweils stationär auf den Zellen wo f bereits zellulär ist, erhält man eine Homotopie von $f|_{X^n}$ zu einer zellulären Abbildung, die $X^{n-1} \cup A$ stationär lässt (dabei muss man wie im Induktionsanfang evtl. unendlich viele Homotopien gleichzeitig ausführen, das ist aber kein Problem).

Stetigkeit der induktiv definierten Homotopie: Die unendlich vielen Homotopien ergeben letztlich

eine, wenn man die n -te Homotopie als $h^n : X^n \times \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right]$ ausführt.

h^n homotopiert also $h_1^{n-1} : X \rightarrow Y$ zu einer zellulären Abbildung auf dem n -Gerüst, induktiv vorausgesetzt, dass h_1^{n-1} auf X^{n-1} zellulär ist. Setze nun

$$h(x, t) := h^n(x, t) \text{ wobei } n \in \mathbb{N} \text{ so, dass } x \in X^n \setminus X^{n-1}$$

Diese Abbildung ist genau dann stetig, wenn sie auf jedem Teilraum $X^n \times I$ stetig ist, denn $X \times I$ trägt die schwache Topologie bezüglich der Inklusionen $X^n \times I \rightarrow X \times I$. Auf diesen Teilräumen ist h aber stetig, weil es jeweils die Verknüpfung endlich vieler Homotopien h_1 bis h_n ist. \square

Korollar 9 (Corollary 4.9).

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall n < k : \pi_n(S^k) = 0.$$

Bemerkung 10. Die übliche CW-Struktur auf S^n besteht aus einem Punkt $s_0 = e^0$ (dem Basispunkt) und einer e^n , deren Rand mit e^0 identifiziert wird. So betrachtet man $S^n = D^n / \partial D^n$.

Beweis. Betrachte auf S^n und $Y := S^k$ die üblichen CW-Strukturen mit Basispunkt s_0 . Jede basispunkterhaltende Abbildung $w : S^n \rightarrow S^k$ ist homotop zu einer zellulären basispunkterhaltenden Abbildung $\tilde{w} : S^n \rightarrow S^k$. Es gilt also $\tilde{w}(S^n) \subseteq Y^n$ wegen Zellularität. Da die einzige Zelle von Dimension kleinergleich n im n -Skelett Y^n von $Y = S^k$ der Basispunkt ist, ist $\tilde{w}(S^n) = \{s_0\}$, also ist $[w]_\sim = [0]$. \square

Beispiel 11 (Example 4.11). Zelluläre Approximation für Paare. Jede Abbildung $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von CW-Paaren kann durch Abbildungen vom selben Typ homotopiert werden zu einer zellulären Abbildung, indem zunächst eine Homotopie zu einer zellulären Abbildung für die Einschränkung $f : A \rightarrow B$ gefunden wird, diese dank Homotopieausdehnungseigenschaft auf X ausdehnt wird und die resultierende Abbildung zu einer zellulären homotopiert, wobei A stationär bleibt.

Korollar 12 (Corollary 4.12). *Eine einfache Konsequenz aus dem Bewiesenen: Ein CW-Paar (X, A) ist n -zusammenhängend wenn alle Zellen in $X \setminus A$ von Dimension größer als n sind. Insbesondere ist (X, X^n) n -zusammenhängend, daher induzieren die Inklusionen $\iota_n : X^n \hookrightarrow X$ Isomorphismen auf π_i für $i < n$ und eine Surjektion auf π_n .*

Beweis. Nach Lemma 4 genügt es für n -Zusammenhang von (X, A) zu zeigen, dass für $0 < i \leq n$ alle Abbildungen der Form $(D^i, \partial D^i) \rightarrow (X, A)$ homotop über Abbildungen dieser Form zu konstanten Abbildungen $D^i \rightarrow A$ sind. Zelluläre Approximation liefert eine Homotopie zu einer zellulären Abbildung $D^i \rightarrow X^n = A$, diese kann dann nach dem Kompressionskriterium zu einer konstanten homotopiert werden, also ist $\pi_i(X, A) = 0$ für $0 < i \leq n$. Die Aussage über (X, X^n) folgt direkt aus der langen exakten Sequenz

$$\cdots \rightarrow \pi_i(X^n) \xrightarrow{\iota_*} \pi_i(X) \xrightarrow{j_*} \pi_i(X, X^n) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(X^n) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(X),$$

denn $\pi_i(X, X^n) = 0$ für $i \leq n$, also sieht die exakte Sequenz so aus:

$$\pi_i(X^n) \xrightarrow{\iota_*} \pi_i(X) \xrightarrow{j_*} 0 \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(X^n) \xrightarrow{\iota_*} \pi_{i-1}(X) \xrightarrow{j_*} 0 \xrightarrow{\partial} \pi_{i-2}(X^n) \rightarrow \cdots$$

und man sieht, dass ι_* für $i \leq n$ surjektiv ist, denn $\text{Bild}(\iota_*) = \text{Kern}(j_*)$ und j_* ist die Nullabbildung. Weiterhin ist ι_* für $i < n$ auch injektiv, denn $\text{Kern}(\iota_*) = \text{Bild}(\partial) = 0$. \square