Erste Čech-Kohomologie und G-Hauptfaserbündel

Konrad Völkel, AG Garbenkohomologie
bei Prof. Soergel im Wintersemester 08/09
an der Uni Freiburg

3. November 2008

1 Vorspann: Hauptfaserbündel

Jetzt: Klassifikation von G-Hauptfaserbündeln durch die erste Čech-Kohomologie, auch mit nichtabelschen Gruppen G. Im Skript steht es statt mit Hauptfaserbündeln mit Überlagerungen, man kann sich dazu überlegen, was man in den Beweisen ändern muss. Alternativ kann man sich überlegen, was man ändern muss, um n-dimensionale $\mathbb{K}$-Bündel durch die erste Čech-Kohomologie mit Koeffizienten in der konstanten Garbe $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ zu klassifizieren.

Zu Anfang eine kurze Wiederholung der ersten Čech-Kohomologie und G-Torsoren, dazu die Definition nichtabelscher Čech-Kohomologie.

Definition 1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und X ein Objekt in $\mathcal{C}$.
Die **Kategorie der Objekte von $\mathcal{C}$ über X**, geschrieben $\mathcal{C}_X$ besteht aus
den Objekten: Morphsimen $p : Y \to X$ in $\mathcal{C}$ mit beliebigem $Y \in \mathcal{C}$ und
den Morphismen: Morphismen $d : Y \to Y'$ in $\mathcal{C}$ für $p : Y \to X$, $q : Y' \to X$ sodass das Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "p"'] & & Y' \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Konkret haben wir die Kategorie Top_X der topologischen Räume über X, die Kategorie der Faserbündel auf X ist eine Unterkategorie davon.

Definition 2. Sei G eine topologische Gruppe mit Verknüpfung $\top$.
Ein G-**Hauptfaserbündel**, auch genannt G-**Torsor**, ist
ein Faserbündel $p : E \to B$ sodass E ein topologisch freier G-Rechtsraum ist
und p einen Homöomorphismus $E_{/G} \xrightarrow{\sim} B$ induziert,
d.h. der Faserraum von F ist als G-Rechtsraum isomorph zu G.

Ein **Morphismus von G-Torsoren auf** X ist eine stetige G-äquivariante Abb. über X (1).

Definition 3. Sei $p : E \to X$ ein G-Torsor. Für jede Trivialisierung $(i_U)_{U\in\mathcal{U}}$ definiere für $U, V \in \mathcal{U}$ eindeutig bestimmte stetige Abbildungen $(\varphi_{UV})_{U,V\in\mathcal{U}}$

$$\varphi_{UV} : U \cap V \to G$$
$$x \mapsto \varphi_{UV}(x) \qquad \text{durch die Gleichung}$$
$$\forall x \in U \cap V,\ f \in G : (i_U \circ i_V^{-1})(x, f) = (x, \varphi_{UV}(x) \bullet f)$$

Diese φ_{UV} heißen **Verklebungsfunktionen** der Trivialisierung $(i_U)_{U\in\mathcal{U}}$.

Bemerkung 4. Man sieht für abelsches G, dass (φ_{UV}) eine Čech-1-Kokette ist. Wenn G nicht abelsch ist, nennen wir alle Mengen von Abbildungen den Form (φ_{UV}) **Čech-1-Koketten**.

Lemma 5. *Für $U, V, W \in \mathcal{U}$ gilt*

$$\forall x \in U \cap V \cap W : \varphi_{UV}(x) \top \varphi_{VW}(x) = \varphi_{UW}(x)$$

Für abelsches G gilt $(d\varphi)_{UVW}(x) = \varphi_{VW}(x) - \varphi_{UW}(x) + \varphi_{UV}(x)$, also ist die Bedingung äquivalent dazu, dass $(\varphi_{UV})_{U,V\in\mathcal{U}}$ ein Čech-1-Kozykel ist. Wenn G nicht abelsch ist, dennen wir alle Koketten, die diese Bedingung erfüllen, Čech-1-Kozykel.

Definition 6. Sei $p : E \to X$ ein G-Torsor. Seien $(i_U)_{U\in\mathcal{U}}$ und $(j_U)_{U\in\mathcal{U}}$ zwei lokale Trivialisierungen von p über $\mathcal{U}$. Dann definiere stetige Abbildungen $(\psi_U)_{U\in\mathcal{U}}$

$$\psi_U : U \to G$$
$$x \mapsto \psi_U(x) \qquad \text{durch die Gleichung}$$
$$\forall x \in U,\ f \in G : (j_U \circ i_U^{-1})(x, f) = (x, \psi_U(x) \bullet f).$$

Diese ψ_U heißen **Übergangsfunktionen** von $(i_U)_{U\in\mathcal{U}}$ nach $(j_U)_{U\in\mathcal{U}}$.

Bemerkung 7. Man sieht sofort, dass $(\psi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ eine Čech-0-Kokette ist.

Lemma 8. *In der Situation der Definition mit Verklebungsfunktionen $(\varphi_U)_{U,V\in\mathcal{U}}$ für $(i_U)_{U\in\mathcal{U}}$ und Verklebungsfunktionen $(\theta_U)_{U,V\in\mathcal{U}}$ für $(j_U)_{U\in\mathcal{U}}$ gilt für alle $U, V \in \mathcal{U}$:*

$$\forall x \in U \cap V : \theta_{UV}(x) = \psi_U(x) \top \varphi_{UV}(x) \top (\psi_V(x))^{-1}.$$

*Für abelsches G gilt also $\theta_{UV}(x) + (d\psi)_{UV}(x) = \varphi_{UV}(x)$, d.h. θ und φ unterscheiden sich nur durch das Bild einer 0-Kokette, sie sind also kohomolog. Wenn G nicht abelsch ist, nennen wir alle Kozykel, die sich nach der obigen Formel durcheinander ausdrücken lassen, **kohomolog**. Dies liefert die Menge $\check{H}^1(\mathcal{U}; G) := \check{Z}^1(\mathcal{U}; G)/\sim$, wobei $\sim$ die Relation "kohomolog" sein soll. Im Falle einer abelschen Gruppe G ist das das selbe wie zuvor definiert und somit eine abelsche Gruppe.*

Definition 9. Sind $p : E \to X$ und $q : \hat{E} \to X$ zwei G-Torsoren mit Trivialisierungen $(i_U)_{U\in\mathcal{U}}$ bzw. $(j_U)_{U\in\mathcal{U}}$ über ein- und derselben Überdeckung $\mathcal{U}$ von X, so heißt ein G-Torsor-Morphismus über X, $d : E \xrightarrow{\sim} \hat{E}$, **trivialisierungsverträglich**, wenn für alle $U \in \mathcal{U}$ die Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "i_U"'] & & q^{-1}(U) \arrow[dl, "j_U"] \\
& U \times G &
\end{tikzcd}$$

2 Klassifikation durch erste Čech-Kohomologie

Lemma 10. *Sei X ein top. Raum mit offener Überdeckung $\mathcal{U}$ und G eine topologische Gruppe. Dann:*

$$\{G\text{-}\textit{Torsoren auf } X \textit{ mit einer Trivialisierung über } \mathcal{U}\}_{/\simeq} \xrightarrow{\sim} \check{Z}^1(\mathcal{U}; G)$$

wobei $\simeq$ trivialisierungsverträgliche Isomorphie von G-Torsoren bedeuten soll.

Beweis. Zu einem G-Torsor $p : E \to X$ mit einer Trivialiserung $(i_U)_{U\in\mathcal{U}}$ über $\mathcal{U}$ bilden wir also die Verklebungsfunktionen $(\varphi_{UV})_{U,V\in\mathcal{U}} \in \check{Z}^1(\mathcal{U}; G)$. Umgekehrt bilden wir zu einem Čech-1-Kozykel $(\varphi_{UV})_{U,V\in\mathcal{U}}$ einen G-Torsor $q : \hat{E} \to X$:

$$\hat{E} := \left(\coprod_{U\in\mathcal{U}} \{U\} \times U \times G \right) / \sim \text{ mit der Äquivalenzrelation}$$

$$\forall U, V \in \mathcal{U},\ x \in U \cap V,\ f \in G : (V, x, f) \sim (U, x, \varphi_{UV}(x) \bullet f),$$

wobei $q = ([(V, x, f)] \mapsto x)$ ist. Eine Trivialisierung über $\mathcal{U}$ erhält man als $j_U : q^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times G$, definiert durch

$$j_U : \{[(V, x, f)] \mid x \in U\} \to U \times G, \quad [(U, x, f)] \mapsto (x, f).$$

Definiere auf $\hat{E}$ die Topologie als diejenige, die erzeugt wird durch alle offenen Mengen, die Urbild von j_U für $U \in \mathcal{U}$ sind. Die G-Rechtsoperation sei $[(V, x, f)] \bullet g := [(V, x, gf)]$. Es ist klar, dass das herausteilen von G einen Homöomorphismus $\tilde{q}$ induziert.

Hat man nun einen G-Torsor $p : E \to X$ mit Trivialisierung $(i_U)_{U\in\mathcal{U}}$, so ist der den Verklebungsfunktionen $(\varphi_{UV})_{U,V\in\mathcal{U}}$ zugeordnete G-Torsor $q : \hat{E} \to X$ mit Trivialisierung $(j_U)_{U\in\mathcal{U}}$ trivialisierungsverträglich isomorph zu p via

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
E \arrow[ur, "p"] \arrow[rr, dashed, "\sim"'] & & \hat{E} \arrow[ul, "q"'] \\
p^{-1}(U) \arrow[u, "\cup"] \arrow[rr, "j_U^{-1}\circ i_U", "\sim"'] \arrow[dr, "\sim", "i_U"'] & & q^{-1}(U) \arrow[u, "\cup"'] \arrow[dl, "\sim"', "j_U"] \\
 & U \times G &
\end{tikzcd}$$

Bilde zu $(\varphi_{UV}) \in \check{Z}^1(\mathcal{U}; G)$ den G-Torsor $q : \hat{E} \to X$ mit Trivialisierung $(j_U)_{U\in\mathcal{U}}$. Dann sind die Verklebungsfunktionen $(\theta_{UV})_{U,V\in\mathcal{U}}$ von q bezüglich j erklärt durch die Gleichung:

$$\forall x \in U \cap V,\ f \in G : (j_U \circ j_V^{-1})(x, f) = (x, \theta_{UV}(x) \bullet f)$$

$$(j_U \circ j_V^{-1})(x, f) = j_U([(V, x, f)]) = j_U([(U, x, \varphi_{UV}(x) \bullet f)]) = (x, \varphi_{UV}(x) \bullet f)$$

und wenn man einen zu q trivialisierungsverträglich isomorphen G-Torsor betrachtet, so hat dieser die gleichen Verklebungsfunktionen. $\square$

Lemma 11. *Sei X ein top. Raum mit offener Überdeckung $\mathcal{U}$ und G eine topologische Gruppe. Dann:*

$$\{G\text{-Torsoren auf } X, \text{ die über } \mathcal{U} \text{ trivialisierbar sind}\}_{/\simeq} \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(\mathcal{U}; G)$$

wobei $\simeq$ Isomorphie von Überlagerungen bedeuten soll.

Beweis. Wähle auf einem über $\mathcal{U}$ trivialisierbaren G-Torsor $p : E \to X$ eine Trivialisierung $(i_U)_{U\in\mathcal{U}}$ über $\mathcal{U}$. Dann gibt es nach vorangegangenem Lemma 10 einen Čech-1-Kozykel $(\varphi_{UV}) \in \check{Z}^1(\mathcal{U}; G)$. Wählt man eine andere Trivialisierung $(j_U)_{U\in\mathcal{U}}$ über $\mathcal{U}$, so hat man einen anderen Čech-1-Kozykel (θ_{UV}), allerdings lassen sich die Verklebungsfunktionen mittels Übergangsfunktionen durch einander ausdrücken, das heißt gerade, dass die entsprechenden Kozykel kohomolog sind.

Umgekehrt wählt man zu einer Kohomologieklasse $[\varphi_{UV}] \in \check{H}^1(\mathcal{U}; G)$ einen Repräsentanten $(\varphi_{UV}) \in \check{Z}^1(\mathcal{U}; G)$, bildet den zugehörigen G-Torsor mit Trivialisierung über $\mathcal{U}$ und vergisst die Trivialisierung.

So bekommt man zu einem G-Torsor eine Kohomologieklasse, die wiederum eindeutig eine Klasse von G-Torsoren mit gewählter Trivialisierung bestimmt. Diese Trivialisierungen sind aber alle kohomolog, somit die verschiedenen G-Torsoren isomorph. Andersherum bekommt man zu jeder Kohomologieklasse eine Klasse von G-Torsoren, die alle zueinander kohomologe Verklebungsfunktionen haben, das ist genau die Klasse, von der ausgegangen wurde. $\square$

Bemerkung 12. Die Konstruktion eines **direkten Limes eines gerichteten Systems** funktioniert wie folgt: Sei das folgende Bildchen ein Ausschnitt eines gerichteten Systems $\mathcal{G}$ von Objekten irgendeiner Kategorie $\mathcal{C}$:

$$\cdots \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \cdots$$

Der Ausschnitt könnte auch so aussehen:

$$\begin{tikzcd}
 & & D \arrow[r] \arrow[dr] & E \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & \cdots \\
 & & F \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Dann heißt ein Objekt $Z \in \mathcal{C}$ zusammen mit lauter Morphismen aus den Objekten des gerichteten Systems $\mathcal{G}$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[dl] & B \arrow[r] \arrow[dll] & C \arrow[r] \arrow[dlll] & \cdots \\
Z & & & &
\end{tikzcd}$$

direkter Limes $\varinjlim \mathcal{G}$, wenn es für jedes weitere Z' mit dieser Eigenschaft einen eindeutigen Morphismus $Z \to Z'$ gibt.

Bemerkung 13. In unserem konkreten Fall haben wir ein gerichtetes System

$$\{\mathcal{U} \subseteq \mathbb{P}(X) \mid \mathcal{U} \text{ gesättigte offene Überdeckung von } X \text{ sodass } p : E \to X \text{ trivialisierbar über } \mathcal{U}\},$$

mit der Teilmengeninklusion. Dann betrachten wir für jedes $\mathcal{U}$ darin einmal die Menge der G-Torsoren uaf X, die über $\mathcal{U}$ trivialisierbar sind und andererseits die abelsche Gruppe $\check{C}^q(\mathcal{U};\mathcal{F})$ für eine fest gewählte Prägarbe $\mathcal{F}$ (oder die Menge $\check{C}^1(\mathcal{U};G)$ für eine nichtabelsche Gruppe G). Diese sind wiederum gerichtet, denn ein über einer Überdeckung trivialiserbarer G-Torsor ist auch auf jeder feineren Überdeckung trivialisierbar, andererseits haben wir für $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ eine Abbildung von Koketten (Projektion auf ein kleineres Produkt), die sich letzlich auf die Čech-Kohomologie fortsetzt:

$$\check{C}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) = \prod_{\sigma \in \mathcal{U}^{q+1}} \mathcal{F}(|\sigma|) \quad \twoheadrightarrow \quad \prod_{\sigma \in \mathcal{V}^{q+1}} \mathcal{F}(|\sigma|) = \check{C}^q(\mathcal{V};\mathcal{F})$$

So bekommt man auch ein gerichtetes System von den Čech-Kohomologiegruppen:

$$\check{H}^q(\mathcal{V};\mathcal{F}) \to \check{H}^q(\mathcal{U};\mathcal{F})$$

Dann definiert man bezüglich dieses gerichteten Systems:

$$\check{H}^q(X;\mathcal{F}) := \varinjlim\{\check{H}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) \mid \mathcal{U} \text{ gesättigte offene Überdeckung von } X\}$$

Je feiner die Überdeckungen $\mathcal{U}$ sind, desto ähnlicher ist $\check{H}^q(\mathcal{U};\mathcal{F})$ dem direkten Limes.

Satz 14. *Sei X ein top. Raum und G eine topologische Gruppe. Dann:*

$$\{G\text{-}\textit{Torsoren auf } X\}_{/\simeq} \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X;G)$$

wobei $\simeq$ Isomorphie von G-Torsoren bedeuten soll.

Beweis. Aus dem vorangegangenen Lemma 11 haben wir bijektive Abbildungen, für jede Überdeckung $\mathcal{U}$, insbesondere für jede gesättigte Überdeckung. Damit haben wir nach der universellen Eigenschaft des direkten Limes (12) auch den gewünschten Isomorphismus, wenn denn $\{G\text{-Torsoren auf } X\}_{/\simeq}$ der direkte Limes von $\{G\text{-Torsoren auf } X, \text{ die über } \mathcal{U} \text{ trivialisierbar sind}\}_{/\simeq}$ über alle gesättigten Überdeckungen ist. □

3 Isomorphie von erster singulärer und Čech-Kohomologie

Satz 15. *Sei $X \in \mathsf{Top}$ zusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend, $G \in \mathsf{AbGrp}$ diskrete abelsche Gruppe. Dann ist*

$$\begin{tikzcd}
H^1_{\text{sing}}(X;G) & & \check{H}^1(X;G) \\
\mathrm{Hom}(H_1(X),G) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[d, "\wr"] & & \{G\text{-}\textit{Torsoren auf } X\}_{/\simeq} \arrow[u, "\wr"'] \arrow[d, "\wr"] \\
\mathsf{Grp}(\pi_1(X,x),G) \arrow[rr, "\sim"] & & \{\pi_1(X,x)\text{-}\textit{Mengen mit f.t. G-Rechtsop.}\}_{/\simeq}
\end{tikzcd}$$

und das hängt nicht vom Basispunkt $x \in X$ ab.

Beweis. Die Pfeile sind in Reihenfolge des "U"s, oben links angefangen, das universelle Koeffiziententheorem, der Satz von Hurewicz, ein zuvor bewiesenes Lemma (28), der Faserfunktor (17) und der vorangegangene Satz 14. □

4 Anhang

4.1 Topologie

Definition 16. Eine Gruppe G operiert **topologisch frei** (oder eigentlich diskontinuierlich) auf einem topologischen Raum X, wenn es zu jedem Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung U gibt, sodass $x \in U$ und $U \cap gU \neq \emptyset$ für ein $g \in G$ bedeutet, dass $g = e$ ist.

Satz 17. *Sei $X \in \mathsf{Top}$ mit universeller Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ und $x_0 \in X$. Dann gibt es einen kovarianten **Faserfunktor** $F : \mathsf{Üb}_X \to \pi_1(X, x_0)\text{-}\mathsf{Ens}$, der jeder Überlagerung $f : Y \to X$ die Faser $p^{-1}(x_0)$ zuordnet und jedem Morphismus $\varphi : f \to g$ die $\pi_1(X, x_0)$-äquivariante Abbildung $\tilde{\varphi} : f^{-1}(x_0) \to g^{-1}(x_0)$. Dieser Funktor ist eine Äquivalenz von Kategorien. Darunter entsprechen zusammenhängende Überlagerungen den Mengen mit transitiver $\pi_1(X, x_0)$-Operation und so sind zusammenhängende Überlagerungen bijektiv abbildbar auf Konjugationsklassen von Untergruppen in $\pi_1(X, x_0)$.*

4.2 Faserbündel

Definition 18. Ein **Faserbündel** ist eine stetige Abbildung $p : E \to B$ von topologischen Räumen $E, B \in \mathsf{Top}$, die **lokal trivialisierbar** ist, d.h. es gibt einen topologischen Raum $F \in \mathsf{Top}$, genannt **Faserraum**, sodass für jeden Punkt $x_0 \in B$ eine Umgebung U existiert, sodass es einen Homöomorphismus φ_U gibt, der das Diagramm zum kommutieren bringt:

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "p"'] & U \times F \arrow[dl, "proj_1"] \\
U &
\end{tikzcd}$$

Faserbündel werden auch $F \to E \to B$ notiert.

Eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von B, bei der alle Mengen $U \in \mathcal{U}$ das Diagramm oben erfüllen, heißt **lokal trivialisierende Überdeckung**. Solch ein $\mathcal{U}$ zusammen mit einer Familie $\mathfrak{A} := (\varphi_U)_{U \in \mathcal{U}}$, die das Diagramm erfüllen, heißt **Bündelatlas**, die $\varphi_U \in \mathfrak{A}$ heißen **Bündelkarten**.

Satz 19. *Jedes Faserbündel, dass lokaler Homöomorphismus ist oder diskrete Faser hat, ist eine Überlagerung. Umgekehrt sind n-blättrige Überlagerungen Faserbündel mit diskreter Faser $F = \{1, ..., n\}$.*

Im Allgemeinen ist die Faser eines Faserbündels allerdings nicht diskret.

Satz 20. *Faserbündel sind Faserungen, also sind auch Überlagerungen Faserungen.*

Im Allgemeinen ist eine Faserung aber nicht lokal trivialisierbar, also kein Faserbündel.

Definition 21. Für je zwei topologische Räume $B, F \in \mathsf{Top}$ heißt die Projektion auf den ersten Faktor $B \times F \to B$ das **triviale Bündel**.

4.3 Prägarben

Definition 22. Sei $X \in \mathsf{Top}$, und $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Eine **Prägarbe** $\mathcal{F}$ auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ ist ein kontravarianter Funktor $\mathcal{F} : \mathsf{Ouv}(X) \to \mathcal{C}$. Die Kategorie dieser Prägarben ist die Funktorkategorie $\mathcal{C}^{\mathsf{Ouv}(X)^\circ}$, also sind Morphismen von Prägarben natürliche Transformationen.

Eine Prägarbe mit Werten in Ab, der Kategorie abelscher Gruppen, heißt **abelsche Prägarbe**.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "\rho_U^V"] & \ni & s \arrow[d, mapsto] \\ V \arrow[u, hook] \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathcal{F}(V) & \ni & s_{|V} \end{tikzcd}$$

Beispiel 23. Sei $X \in \mathsf{Top}$. Für $U \in \mathsf{Ouv}(X)$ setze $\mathcal{F}(U) := \mathsf{Top}(U, \mathbb{R})$. Dann gibt es für $V \subseteq U$ und für jedes $f \in \mathsf{Top}(U, \mathbb{R})$ die Einschränkung $f_{|V} \in \mathsf{Top}(V, \mathbb{R})$, also ist dies eine Prägarbe, die **Prägarbe der reellwertigen stetigen Funktionen auf** X.

Das Beispiel funktioniert auch mit $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$, allgemein mit jeder topologischen Gruppe G: Man notiert dann die **Prägarbe der G-wertigen stetigen Funktionen auf** X auch mit $\mathcal{C}_{G,X}$. Ist G mit der diskreten Topologie versehen, so notiert man diese **Prägarbe der lokal konstanten G-wertigen Funktionen** mit G_X. Man hat z.B. Morphismen von Prägarben

$$\mathbb{Z}_X \to \mathbb{R}_X \to \mathcal{C}_{\mathbb{R},X}$$

Beispiel 24. Für $X \in \mathsf{Top}$, $x \in X$, $A \in \mathsf{Grp}$ definiere

$$A_{(x)}(U) := \begin{cases} A & \text{falls } x \in U \\ 0 & sonst \end{cases}$$

diese Prägarbe heißt **Wolkenkratzer** bei x mit Faser A.

4.4 Abelsche Čech-Kohomologie

Definition 25. Sei $X \in \mathsf{Top}$ und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X.

Ein **q-Simplex** σ von $\mathcal{U}$ ist ein geordnetes $q+1$-Tupel von $\mathcal{U}$-Mengen mit gemeinsamen nichtleeren Schnitt, in Formeln $\sigma = (U_0, ..., U_q)$ mit $U_i \in \mathcal{U}$ und $\bigcap_{i=0}^q U_i \neq \emptyset$. Die Schnittmenge $|\sigma| := \bigcap_{i=0}^q U_i$ heißt **Träger** von σ.

Der **j-te partielle Rand** $\partial_j \sigma$ von σ ist definiert als $(q-1)$-Simplex $(U_0, .., U_{j-1}, U_{j+1}, .., U_q)$. Der **Rand** $\partial \sigma$ von σ ist definiert als die alternierende Summe der partiellen Ränder:

$$\partial \sigma := \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \partial_j \sigma$$

Definition 26. Sei $X \in \mathsf{Top}$, $\mathcal{U}$ offene Überdeckung von X und $\mathcal{F}$ eine abelsche Prägarbe auf X. Eine **q-Kokette** von $\mathcal{U}$ mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$ ist eine Abbildung, die jedem q-Simplex σ ein Element von $\mathcal{F}(|\sigma|)$ zuordnet. Die Menge aller q-Koketten von $\mathcal{U}$ mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$ wird $\check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ notiert. Dies ist mit punktweiser Addition eine abelsche Gruppe:

$$\check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = \prod_{\sigma \in \mathcal{U}^{q+1}} \mathcal{F}(|\sigma|)$$

Die Kokettengruppen bilden einen Kokettenkomplex $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ mit dem Codifferential

$$\delta_q : \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{C}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

$$(\delta_q \omega)(\sigma) := \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \rho_{|\sigma|}^{|\partial_j \sigma|} \omega(\partial_j \sigma).$$

Die **Čech-Kozykel** $\check{Z}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) := \mathrm{Ker}(\delta_q)$ und **Čech-Koränder** $\check{B}^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \mathrm{Im}(\delta_{q-1})$ erfüllen die Beziehung $B^q \subseteq Z^q$, denn $\delta^2 = 0$ (Komplexeigenschaft). Für $q < 0$ setze $C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) := 0$.

Die **Čech-Kohomologie von** $\mathcal{U}$ mit Werten in $\mathcal{F}$ ist definiert als

$$\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \mathcal{H}^q(\check{C}^*(\mathcal{U},\mathcal{F}),\delta) = \check{Z}^q(\mathcal{U},\mathcal{F})/\check{B}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}).$$

Die Überlagerungen von X sind eine gerichtete Menge unter Verfeinerung. Daher ist das System von abelschen Gruppen $\{\check{H}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) \mid \mathcal{U} \text{ offene Überdeckung von } X\}$ auch gerichtet. Die **Čech-Kohomologie von** X mit Werten in $\mathcal{F}$ ist definiert als direkter Limes dieses gerichteten Systems, in Formeln

$$\check{H}^q(X;\mathcal{F}) := \varinjlim \check{H}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}).$$

4.5 Auf Nachfrage verfügbares

Satz 27. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ von topolgischen Räumen $X, Y \in \mathsf{Top}$ ist genau dann stetig, wenn sie stetig für alle Mengen $U \in \mathcal{U}$ einer offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ ist. Also erhält man für eine abelsche topologische Gruppe $G \in \mathsf{AbTopGrp}$ einen Isomorphismus*

$$\mathsf{Top}(X,G) \xrightarrow{\sim} \check{H}^0(X;G_X)$$

Lemma 28. *Sei $X \in \mathsf{Top}$ zusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend, $G \in \mathsf{AbGrp}$ diskrete abelsche Gruppe. Dann ist*

$$\mathsf{Grp}(\pi_1(X,x),G) \xrightarrow{\sim} \{\pi_1(X,x)\text{-}\mathit{Mengen\ mit\ freier\ transitiver\ }G\text{-}\mathit{Rechtsoperation}\}_{/\simeq}.$$

Bemerkung 29. Jeder Morphismus von G-Torsoren ist schon ein Isomorphismus!

Satz 30.

$$\{n\text{-}\mathit{dim.}\ \mathbb{K}\text{-}\mathit{Bündel\ auf\ }X\}_{/\simeq} \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X;\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})).$$

Beweis. Ordne jedem $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$-Torsor $p : E \to X$ das $\mathbb{K}$-Bündel $(E \times \mathbb{K}^n)_{/\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})} \to X$ zu, dies ist analog zur Situation von n-blättrigen Überlagerungen ein Isomorphismus. □