Das Hilbert-Polynom und die Gelfand-Kirillov-Dimension von A_n-Moduln

Konrad Voelkel

13. Mai 2009

Situation Wir haben einen $(A_n, \mathcal{B})$-Modul (M, Γ) und möchten diesem eine Dimension zuweisen. Dazu messen wir das Wachstum der Filtrierung. Um das dann tatsächlich auszurechnen, definieren wir einen Dimensionsbegriff für graduierte Moduln über graduierten K-Algebren und benutzen den assoziierten graduierten Modul um diesen Begriff zu transportieren.

Die Gelfand-Kirillov-Dimension eines Moduls

Definition 1. Seien $f_1, ..., f_l$ endlich viele Erzeuger von A_n als K-Algebra und $V := K\langle\{f_i\}\rangle$ der davon erzeugte K-Vektorraum. Setze $U_0 := K$ und $U_i := V^i$, das ist eine Filtrierung von A_n mit $\dim_K U_i < \infty$. Für $V = B_1$ ist dies genau die Bernsteinfiltrierung. Sei M ein endlich erzeugter A_n-Linksmodul mit einer guten Filtrierung Γ bezüglich $\mathcal{B}$, ohne Einschränkung M endlich erzeugt über Γ_0. Setze $\Omega_k := U_k\Gamma_0$ und

$$\delta(M, V) := \inf\{\nu \in \mathbb{R} \mid \dim_K \Omega_s \leq s^\nu \text{ für } s \gg 0\} \qquad \text{(Gelfand-Kirillov-Dimension)}$$

1 Existenz des Hilbertpolynoms

Sei $M = \bigoplus_{i \geq 0} M_i$ ein endlich erzeugter graduierter Modul über dem Ring $K[x_1, .., x_n]$. Wir wollen zeigen:

Satz. *Betrachte die Funktion $n \mapsto \dim_K M_n$ sowie die Reihe darüber $n \mapsto \sum_{i=0}^n \dim_K M_i$. Dann gibt es Polynome in $\mathbb{Q}[t]$, die für $n \gg 0$ mit diesen Funktionen übereinstimmen.*

1.1 Diskrete Mathematik

Definition 2. Ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[t]$ heißt **numerisch**, wenn für alle $t \gg 0$ stets $f(t) \in \mathbb{Z}$ ist.

Definition 3. Der **Differenzenoperator** $\Delta : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[t]$ ist definiert als

$$(\Delta f)(t) := f(t+1) - f(t)$$

Bemerkung 1. Für $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist $\Delta_t \left(\sum_{i=-\infty}^t f(i)\right) = f(t+1)$

Lemma 1.

1. $\Delta_t \binom{t}{r} = \binom{t}{r-1}$.

2. *Sei $p \in \mathbb{Q}[t]$ numerisches Polynom, dann existieren $c_0, .., c_k \in \mathbb{Z}$ sodass*

$$p(t) = \sum_{i=0}^{k} c_{k-i} \binom{t}{i} \qquad \text{(Binomialdarstellung)}$$

und damit $\forall z \in \mathbb{Z} : p(z) \in \mathbb{Z}$.

3. *Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ eine Abbildung. Wenn es ein numerisches Polynom $q \in \mathbb{Q}[t]$ gibt, sodass für alle $z \gg 0$ stets $(\Delta f)(z) = q(z)$ gilt, dann existiert auch ein numerisches Polynom $p \in \mathbb{Q}[t]$, sodass für alle $z \gg 0$ stets $f(z) = p(z)$ gilt (Stammpolynom).*

Beweis.

1. $\Delta_t \binom{t}{r} = \binom{t+1}{r} - \binom{t}{r}$

$$= \frac{t!(t+1)}{r!(t+1-r)(t-r)!} - \frac{t!}{r!(t-r)!} = \frac{t!(t+1) - t!(t+1-r)}{r!(t+1-r)(t-r)!}$$

$$= \frac{t!r}{r!(t+1-r)(t-r)!} = \frac{t!}{(r-1)!(t-(r-1))(t-(r-1)-1)!}$$

$$= \frac{t!}{(r-1)!(t-(r-1))!} = \binom{t}{r-1}$$

2. Induktion über den Grad: Induktionsanfang p konstant, also $p(z) = c_0 \in \mathbb{Q}$ ist klar, denn damit p numerisch ist, muss für große z ja $p(z) \in \mathbb{Z}$, also $c_0 \in \mathbb{Z}$ sein. Sei also p von Grad $k > 0$.

   Der Leitterm von $\binom{t}{r}$ ist $t^r/r!$, wir können also $p(t) = \sum_{i=0}^{k} a_i t^i$ umschreiben zu $p(t) = \sum_{i=0}^{k} c_{k-i} \binom{t}{i}$ - indem wir $c_0 := r! a_k$ setzen usw. Jetzt wollen wir sehen, dass die $c_i \in \mathbb{Z}$ liegen. Wir können Δp nach (1) schreiben als

$$\Delta p(t) = \sum_{i=0}^{k} c_{k-i} \binom{t}{i-1}$$

   und nach Induktionsvorraussetzung sind $c_{k-1}, ..., c_0 \in \mathbb{Z}$, denn Δp hat Grad $k-1$. Damit ist $p(t) - c_k$ ein Polynom mit ganzzahligen Werten. Da p numerisch ist, ist für großes z ja $p(z) \in \mathbb{Z}$, also mit $p(z) - c_k \in \mathbb{Z}$ auch $c_k \in \mathbb{Z}$.

3. Wir finden nach (2) für das Polynom q ganze Zahlen $c_0, ..., c_k \in \mathbb{Z}$ sodass

$$q(t) = \sum_{i=0}^{k} c_{k-i} \binom{t}{i}.$$

   Wir definieren ein Polynom Q mit $\Delta Q = q$:

$$Q(t) := \sum_{i=0}^{k} c_{k-i} \binom{t}{i+1}.$$

   Für $z \gg 0$ gilt nun $\Delta(f - Q)(z) = 0$, also ist $f - Q$ für große n konstant eine ganze Zahl, wir nennen sie c_{k+1}. Setze nun $p(t) := Q(t) + c_{k+1}$ und es gilt für $z \gg 0$ stets $f(z) = p(z)$.

$\square$

1.2 Beweis

Satz 1. *Sei M endlich erzeugter graduierter Modul über $K[x_1, ..., x_n]$. Dann gibt es ein numerisches Polynom $\chi \in \mathbb{Q}[t]$ sodass $\chi(t) = \sum_{i=0}^{t} \dim_K(M_i)$ für $t \gg 0$ (Hilbertpolynom).*

Beweis. Induktion über die Anzahl der Variablen n. Für $n = 0$ ist M ein endlich erzeugter K-Vektorraum und damit $\sum_{i=0}^{t} \dim_K M_i$ konstant für $t \gg 0$, setze also $\chi(t) :=\sim_{i=0}^{\infty} \dim_K M_i = \dim_K M$. Sei nun $n > 0$ und die Behauptung gelte für $n-1$ Variablen. Sei $\varphi_i : M_i \to M_{i+1}$ die Multiplikation mit x_n, also $\varphi_i : m \mapsto x_n m$. φ_i ist K-linear, $\operatorname{Ker}(\varphi_{i-1}) = \{m \in M \mid x_n m = 0\} = \operatorname{Ann}(x_n, M_{i-1})$ und $\operatorname{Coker}(\varphi_i) = M_i/_{x_n M_{i-1}}$. Das liefert eine exakte Sequenz von K-Vektorräumen:

$$\operatorname{Ker}(\varphi_{i-1}) \hookrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} M_i \twoheadrightarrow \operatorname{Coker}(\varphi_i).$$

Setze $Q := \bigoplus_{i \geq 0} \operatorname{Ker}(\varphi_{i-1})$ und $L := \bigoplus_{i \geq 0} \operatorname{Coker}(\varphi_i)$, dann erhalten wir eine exakte Sequenz von $K[X]$-Moduln:

$$Q \hookrightarrow M \xrightarrow{\varphi} M \twoheadrightarrow L.$$

Nun ist aber $x_n Q = 0$ und $x_n L = 0$, also sind Q, L schon endlich erzeugte $K[x_1, ..., x_{n-1}]$-Moduln, nach Induktionsvorraussetzung existieren also numerische Polynome $\chi_Q,\ \chi_L \in \mathbb{Q}[t]$ mit

$$\chi_Q(t) = \sum_{i=0}^{t} \dim_K Q_i \qquad \text{und} \qquad \chi_L(t) = \sum_{i=1}^{t} \dim_K L_i \qquad \text{für } t \gg 0.$$

Additivität von $\dim_K(-)$ liefert

$$\dim_K Q_{i-1} - \dim_K M_{i-1} + \dim_K M_i - \dim_K L_i = 0,$$

summieren wir auf, wird das nach Lemma 1 zu:

$$\chi_Q(i-1) - \chi_L(i) = (\Delta_i \chi_M)(i-1).$$ □

2 Dimension und Multiplizität

Definition 4. Sei (M, Γ) ein endlich erzeugter $(A_n, \mathcal{B})$-Linksmodul und Γ eine gute Filtrierung von M (siehe Def. 9 und Def. 7). Sei $\chi(t, \Gamma, M)$ das Hilbertpolynom von $gr^{\Gamma} M$ über S_n. Dieses nennen wir auch das **Hilbertpolynom** von M bezüglich Γ. Dann gilt nach Satz 1 für $t \gg 0$:

$$\chi(t, \Gamma, M) = \sum_{i=0}^{t} \dim_K(\Gamma_i/\Gamma_{i-1}) = \dim_K(\Gamma_t)$$

Wir nennen den Grad von $\chi(t, \Gamma, M)$ die **Dimension** $d := d(M) := \deg \chi$ von M. Wenn wir den Koeffizient von t^i mit a_i bezeichnen, so ist a_d der Leitkoeffizient von $\chi(t, \Gamma, M)$. Wir nennen $m(M) := d! a_d$ die **Multiplizität** von M. Die Dimension ist eine natürliche Zahl und die Multiplizität aufgrund der Binomialdarstellung von $\chi(t, \Gamma, M)$ auch.

Lemma 2. *Die Definition der Dimension und Multiplizität hängt nicht von der gewählten guten Filtrierung Γ ab.*

Beweis. Seien Γ und Ω zwei gute Filtrierungen von M bezüglich $\mathcal{B}$. Dann gibt es (nach Proposition 1) $k \in \mathbb{N}$ sodass

$$\Omega_{j-k} \subseteq \Gamma_j \subseteq \Omega_{j+k}.$$

Für die Dimensionen folgt

$$\dim_K \Omega_{j-k} \leq \dim_K \Gamma_j \leq \dim_K \Omega_{j+k}$$

und mit Satz 1 schließlich

$$\chi(j-k,\Omega,M) \leq \chi(j,\Gamma,M) \leq \chi(j+k,\Omega,M) \qquad \text{für } j \gg 0.$$

Damit haben $\chi(t,\Gamma,M)$ und $\chi(t,\Omega,M)$ das gleiche Verhalten für $t \to \infty$. Da dieses Verhalten nur vom Leitterm abhängt, sind Grad und Leitkoeffizient der beiden Polynome gleich. □

Lemma 3. *Sei M ein endlich erzeugter A_n-Linksmodul mit einer guten Filtrierung Γ bezüglich $\mathcal{B}$. Dann ist $\delta(M,B_1) = d(M)$, d.h. der Leitterm des Hilbertpolynoms ist die kleinste polynomielle Schranke für das Wachstum der Bernsteinfiltrierung.*

Beweis. Es ist $\delta(M,B_1) = \inf\{\nu \in \mathbb{R} \mid \dim_K \Gamma_s \leq s^\nu \text{ für } s \gg 0\}$. $\dim_K \Gamma_s = \chi(s,\Gamma,M)$ für $s \gg 0$, also ist $\dim_K \Gamma_s$ beschränkt durch $s^{d(M)}$, nicht jedoch durch $s^{d(M)-1}$. □

Beispiel 1. Betrachte $M = A_n$ als Linksmodul über sich selbst. Dann ist die Bernsteinfiltrierung $\mathcal{B}$ gut und wir wollen $\chi(t,\mathcal{B},A_n)$ ausrechnen. Dazu brauchen wir nach Definition 4 die Dimension von B_t, es ist aber $B_t = \langle\{x^\alpha \partial^\beta \mid |\alpha| + |\beta| \leq t\}\rangle$ als K-Vektorraum, daher ist $\chi(t,\mathcal{B},A_n) = \dim_K(B_t) = \binom{t+2n}{2n}$. Als Polynom in t hat χ somit Grad $2n$ und Leitkoeffizient $1/(2n)!$. Damit ist die Dimension $d(A_n) = 2n$ und die Multiplizität $m(A_n) = 1$.

Beispiel 2. Der A_n-Linksmodul $K[X] = K[x_1,...,x_n]$ ist filtriert über den Grad: $\Gamma_s := \bigoplus_{i\geq 0}^s \{f \in K[X] \mid \deg f = s\} = \{f \in K[X] \mid \deg f \leq s\}$. Diese Filtrierung ist mit $\mathcal{B}$ verträglich und sogar gut, denn B_i enthält alle Polynome von Grad $\leq i$ und damit ist $B_i\Gamma_s = \Gamma_{s+i}$. Die Dimension von Γ_s ist $\dim_K \Gamma_s = \binom{n+s}{n}$, das ist ein Polynom von Grad n in t und hat den Leitkoeffizient $1/n!$. Also ist $d(K[X]) = n$ und $m(K[X]) = 1$.

3 Invarianz unter Twisten

Lemma 4. *Sei M ein endlich erzeugter A_n-Linksmodul. Bezeichne $M_\mathcal{F}$ den mit der Fouriertransformation getwisteten Modul, so haben M und $M_\mathcal{F}$ gleiche Dimension und Multiplizität.*

Beweis. Die Fouriertransformation erhält die Bernsteinfiltrierung, d.h. $\mathcal{F}(B_i) = B_i$.

Seien $\gamma_1,...,\gamma_l$ Erzeuger von M und $\Gamma_0 := \langle\{1,\gamma_1,...,\gamma_l\}\rangle$ der davon und von 1 erzeugte Vektorraum. Setze $\Gamma_k := B_k\Gamma_0$, das liefert eine gute Filtrierung von M bezüglich $\mathcal{B}$. $M_\mathcal{F}$ wird auch von Γ_0 erzeugt und $\Omega_k := B_k \bullet_\mathcal{F} \Gamma_0$ liefert eine gute Filtrierung von $M_\mathcal{F}$. Da die Fouriertransformation die Bernsteinfiltrierung erhält ist $\Gamma_k = \Omega_k$ und schliesslich haben M und $M_\mathcal{F}$ dasselbe Hilbertpolynom. □

Wenn wir mit einem Automorphismus twisten, der die Bernsteinfiltrierung nicht erhält, haben wir auch nicht das gleiche Hilbertpolynom, dann wird es etwas schwieriger. Wir erinnern uns an die Gelfand-Kirillov-Dimension.

Lemma 5. *Für jeden endlichdimensionalen K-Vektorraum V, dessen Basis A_n als K-Algebra erzeugt, ist $U_0 := K$, $U_i := V^i$ eine Filtrierung von A_n mit $\dim_K U_i < \infty$ und für jeden endlich erzeugten $(A_n, \mathcal{B})$-Linksmodul (M, Γ) mit Γ gut und $\Omega_k := U_k\Gamma_0$ ist*

$$\delta(M, V) = \inf\{\nu \in \mathbb{R} \mid \dim_K \Omega_s \leq s^\nu \text{ für } s \gg 0\} = d(M).$$

Beweis. $\dim_K V < \infty \implies \exists r \in \mathbb{N} : V \subseteq B_r$, also $U_k = V^k \subseteq B_{rk}$, damit $\Omega_k = U_k\Gamma_0 \subseteq B_{rk}\Gamma_0 \subseteq \Gamma_{rk}$ und so $\dim_K \Omega_k \leq \dim_K \Gamma_{rk}$, also auch $\delta(M, V) \leq \delta(M, B_1)$. Analog $\exists r' \in \mathbb{N} : B_1 \subseteq V^k$, also $\delta(M, V) \geq \delta(M, B_1)$. Zusammen mit $\delta(M, B_1) = d(M)$ ergibt sich $\delta(M, V) = d(M)$. □

Korollar 1. *Sei M ein endlich erzeugter A_n-Linksmodul und $\sigma \in \mathrm{Aut}(A_n)$. Dann ist die Dimension invariant unter Twisten: $d(M) = d(M_\sigma)$.*

Beweis. Setze $V := \sigma(B_1)$, das ist ein K-Vektorraum dessen Basis A_n erzeugt. Mit einer guten Filtrierung $\Gamma_k := B_k\Gamma_0$ und $\Omega_k := B_k \bullet_\sigma \Gamma_0 = \sigma(B_k)\Gamma_0$ folgt mit Lemma 5:

$$d(M_\sigma) = \delta(M_\sigma, B_1) = \delta(M, V) = d(M).$$

□

4 Eigenschaften

Satz 2. *Sei M ein endlich erzeugter A_n-Linksmodul und $N \leq M$ ein Untermodul. Dann gilt:*

1. *$d(M) = \max\{d(N),\ d(M/N)\}$.*
2. *Wenn $d(N) = d(M/N)$, dann ist $m(M) = m(N) + m(M/N)$.*

Beweis.

1. Da M endlich erzeugt ist, gibt es eine gute Filtrierung Γ. Seien Γ' und Γ'' die guten Filtrierungen von N und M/N, die durch Γ induziert werden. Wir haben eine kurze exakte Sequenz von Vektorräumen

   $$0 \to \Gamma'_k/\Gamma'_{k-1} \hookrightarrow \Gamma_k/\Gamma_{k-1} \twoheadrightarrow \Gamma''_k/\Gamma''_{k-1} \to 0$$

   und damit ist

   $$\dim_K \Gamma_k/\Gamma_{k-1} = \dim_K \Gamma'_k/\Gamma'_{k-1} + \dim_K \Gamma''_k/\Gamma''_{k-1}.$$

   Aufsummieren liefert für $s \gg 0$:

   $$\chi(s, \Gamma, M) = \chi(s, \Gamma', N) + \chi(s, \Gamma'', M/N).$$

   Diese Gleichheit von Polynomen liefert über die Grade der Polynome $d(M) \leq \max\{d(N), d(M/N)\}$. Da die Leitkoeffizienten nicht negativ sind, können sie sich nicht auslöschen und wir haben sogar Gleichheit.

2. Wenn $d(N) = d(M/N)$, so haben die Polynome alle denselben Grad $d(M)$ und wir erhalten die Gleichung über die Multiplizitäten über die Leitkoeffizienten.

□

Korollar 2. *Seien $M_1, .., M_k$ endlich erzeugte A_n-Linksmoduln und $M = \bigoplus M_i$ ihre direkte Summe. Dann:*

1. $d(M) = \max\{d(M_i) \mid i \in \{1,..,k\}\}$.

2. *Wenn* $d(M) = d(M_i)$ *für ein* $i \in \{1,..,k\}$, *dann ist* $m(M) = \sum_{i=1}^k m(M_i)$.

Beweis. Induktion über k mit Anwenden von Satz 2 auf den Untermodul $M_k \leq M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$. $\square$

Korollar 3. *Sei* M *ein endlich erzeugter* A_n*-Linksmodul. Dann ist* $d(M) \leq 2n$.

Beweis. Sei M von r Elementen erzeugt. Das heißt, dass es einen Epimorphismus $\varphi : A_n^r \twoheadrightarrow M$ gibt. Der Kern $\operatorname{Ker}\varphi$ ist ein Untermodul von A_n^r und damit folgt aus Satz 2 $d(A_n^r) = \max\{d(M), d(\operatorname{Ker}\varphi)\}$. Aus Korollar 2 wissen wir $d(A_n^r) = 2n$, damit folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 4. *Sei* $I \trianglelefteq A_n$ *ein Linksideal,* $I \neq 0$*. Dann ist* $d(A_n/I) \leq 2n - 1$.

Beweis. Für ein zyklisches Ideal $I = A_n d$, $0 \neq d \in I$ kann nicht $d(A_n/A_n d) = 2n$ sein, denn dann wäre $m(A_n) = m(A_n) + m(A_n d)$, was ein Widerspruch dazu ist, dass alle Multiplizitäten größer 0 sind.

Für ein beliebiges Ideal I betrachten wir für ein $0 \neq d \in I$ den Untermodul $I/A_n d$ von $A_n/A_n d$, dessen Quotient nach dem noetherschen Isomorphiesatz gerade A_n/I ist. Dann hat A_n/I Dimension höchstens so groß wie $A_n/A_n d$, somit gilt die Behauptung. $\square$

5 Die Bernsteinsche Ungleichung

Lemma 6. *Sei* (M, Γ) *ein endlich erzeugter* $(A_n, \mathcal{B})$*-Linksmodul. Wenn* $\Gamma_0 \neq 0$ *ist, so ist die* K*-lineare Abbildung*

$$\varphi : B_i \to \operatorname{Hom}_K(\Gamma_i, \Gamma_{2i}), \qquad a \mapsto (u \mapsto au)$$

injektiv.

Beweis. Für $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ genügt es zu zeigen, dass für $0 \neq a \in B_i$ stets $a\Gamma_i \neq 0$. Induktion über i: Für $i = 0$ ist $B_0 = K$ und $\Gamma_0 \neq 0$ nach Voraussetzung, also $\forall a \in K^* : a\Gamma_0 \neq 0$.

Sei nun $i > 0$: Angenommen, $0 \neq a \in B_i$ und $a\Gamma_i = 0$, dann $a \notin K$ und in kanonischer Form hat a einen Term $cx^\alpha \partial^\beta$ mit $c \in K^*$ und $|\alpha| + |\beta| > 0$. Angenommen $\exists k \in \{1, ..., n\} : \alpha_k \neq 0$, dann betrachte $[a, \partial_k] \in B_{i-1}$, das hat in kanonischer Form einen Summanden $\alpha_i c x^{\alpha - e_i} \partial^\beta$. Nach Induktionsvorraussetzung ist mit $0 \neq [a, \partial_k] \in B_{i-1}$ auch $[a, \partial_k]\Gamma_{i-1} \neq 0$. Wegen $a\Gamma_i = 0$ und $\partial_k \Gamma_{i-1} \subseteq \Gamma_i$ gilt

$$[a, \underset{k}{\partial}]\Gamma_{i-1} \subseteq a \underset{k}{\partial} \Gamma_{i-1} \subseteq a\Gamma_i = 0. \text{ Widerspruch!}$$

Analog zeigt man den Fall $\beta_k \neq 0$.

Sei nun $0 \neq b \in B_{i-1}$, dann ist nach Induktionsvoraussetzung $b\Gamma_{i-1} \neq 0$. Sei $0 \neq a \in B_i$. Wenn $a\Gamma_i = 0$, so ist $a \ni K$, damit hat a in kanonischer Form einen Term $cx^\alpha \partial^\beta$ mit $c \in K^*$ und $|\alpha| + |\beta| > 0$. Angenommen, es gibt ein i mit $\alpha_i \neq 0$, dann ist $\alpha_i c x^{\alpha - e_i} \partial^\beta$ ein Summand in der kanonischen Form von $[a, \partial_i]$. Also ist $0 \neq [a, \partial_i] \in B_{i-1}$. Mit $a\Gamma_i = 0$ folgt

$$[a, \partial_i]\Gamma_{i-1} \subseteq a\partial_i\Gamma_{i-1}.$$

Allerdings ist $\partial_i\Gamma_{i-1} \subseteq \Gamma_i$ und somit $[a, \partial_i]\Gamma_{i-1} = 0$ entgegen der Induktionsvoraussetzung. Analog kann man annehmen, dass es ein i mit $\beta_i \neq 0$ gibt. $\square$

Satz 3 (Bernstein '72)**.** *Sei M ein endlich erzeugter A_n-Linksmodul, $M \neq 0$. Dann ist $d(M) \geq n$.*

Beweis. Sei Γ_0 ein Vektorraum, dessen Basis aus Erzeugern von M besteht und $\Gamma_k := B_k\Gamma_0$ (das ist wieder eine gute Filtrierung). Sei $\chi(t) := \chi(t, \Gamma, M)$ das Hilbertpolynom von M bezüglich Γ. Nach Lemma 6 gilt

$$\dim_K B_i \leq \dim_K \operatorname{Hom}_K(\Gamma_i, \Gamma_{2i}) = \dim_K \Gamma_i \cdot \dim_K \Gamma_{2i}.$$

Für $i \gg 0$ ist also $\dim_K B_i \leq \chi(i)\chi(2i)$. Andererseits ist $\dim_K B_i = \binom{i+2n}{2n}$ ein Polynom von Grad $2n$. Also muss $\chi(i)\chi(2i)$ als Polynom in i mindestens von Grad $2n$ sein. Der Grad von $\chi(i)\chi(2i)$ ist aber gerade $2d(M)$, also ist $d(M) \geq n$. $\square$

Bemerkung 2. Die Ungleichungen, die wir für die Dimension eines A_n-Moduls haben, sind scharf: $d(A_n) = 2n$ und $d(K[X]) = n$. Es gibt sogar für jedes $k \in \{n, n+1, ..., 2n-1, 2n\}$ A_n-Moduln mit Dimension k. Die Moduln von minimaler Dimension heißen **holonome Moduln**.

6 Anhang

6.1 Filtrierte Ringe und filtrierte Moduln

Ringe und Algebren sind in diesem Abschnitt stets mit 1, aber nicht notwendig kommutativ zu verstehen. Mit Moduln sind auch stets Linksmoduln gemeint.

Definition 5. Eine R-Algebra S, die Vereinigung einer Aufsteigenden Kette $S_0 \subseteq \cdots \subseteq S_i \subseteq S_{i+1} \subseteq \cdots$ von R-Moduln ist, $S = \bigcup_{i \geq 0} S_i$, sodass die Multiplikation in S für $s_i \in S_i,\ s_j \in S_j$ die Bedingung $s_i s_j \in S_{i+j}$ und $1 \in S_0$ erfüllt, heißt **filtrierte R-Algebra**. Für $R = \mathbb{Z}$ spricht man von einem **filtrierten Ring**. Zu einer R-Algebra kann es mehrere Filtrierungen geben.

Jede graduierte Algebra ist trivialerweise filtriert.

Zu jeder R-Algebra S mit Filtrierung Γ (also $S = \bigcup_{i \geq 0} \Gamma_i$ usw.) definiert man die **assoziierte graduierte R-Algebra** $\operatorname{gr}^\Gamma S := \bigoplus_{i \geq 0} \Gamma_i / \Gamma_{i-1}$. Es ist $(\operatorname{gr}^\Gamma S)_0 = \Gamma_0$ und alle Bedingungen für eine positive $\mathbb{Z}$-Graduierung sind erfüllt.

Definition 6. Sei S eine R-Algebra mit Filtrierung Γ und M ein S-Modul. Unter einer **mit Γ verträglichen Filtrierung** von M versteht man R-Moduln M_i mit $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_i \subseteq M_{i+1} \subseteq \cdots$ und $M = \bigcup_{i \geq 0} M_i$, sodass $1 \in M_0$ und $\Gamma_k M_i \subseteq M_{i+k}$ und M über M_0 ein endlich erzeugter R-Modul ist.

Zu jedem S-Modul M mit einer Filtrierung Θ, die mit einer Filtrierung Γ von S verträglich ist, definiert man den **assoziierten graduierten** $\operatorname{gr}^\Gamma S$**-Modul** $\operatorname{gr}^\Theta M := \bigoplus_{i \geq 0} \Theta_i / \Theta_{i-1}$. Aufgrund der geforderten Verträglichkeit ist das tatsächlich ein $(\operatorname{gr}^\Gamma S)$-Modul.

6.2 Filtrierungen von A_n-Moduln

Definition 7. A_n ist eine filtrierte K-Algebra mit der **Bernsteinfiltrierung** $\mathcal{B}$:

$$B_k := \{D \in A_n \mid \deg D \leq k\}.$$

Jedes B_k ist ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\{x^\alpha \partial^\beta \mid |\alpha| + |\beta| \leq k\}$. Insbesondere ist $B_0 = K$ und $B_1 = \langle \{1, x_1, .., x_n, \partial_1, .., \partial_n\} \rangle$.

Definition 8. Die zu A_n mit Bernsteinfiltrierung $\mathcal{B}$ assoziierte graduierte K-Algebra bezeichnen wir mit $S_n := \operatorname{gr}^{\mathcal{B}} A_n$. Diese K-Algebra ist isomorph zu $K[y_1, ..., y_{2n}]$.
([Cou95] Theorem 7.3.1).

Definition 9. Sei S eine R-Algebra. Sei M ein S-Modul, Γ eine Filtrierung von S und Θ eine mit Γ verträgliche Filtrierung von M. Dann heißt Θ **gute Filtrierung**, wenn $\operatorname{gr}^\Theta M$ endlich erzeugt über $\operatorname{gr}^\Gamma S$ ist.

Ein A_n Modul mit einer Filtrierung Θ, die mir $\mathcal{B}$ verträglich ist, ist also gut, wenn $\operatorname{gr}^\Theta M$ endlich erzeugt über S_n ist.

Proposition 1. *Sei M ein A_n-Modul und Γ und Ω zwei Filtrierungen von M bezüglich $\mathcal{B}$. Wenn beide Filtrierungen gut sind, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass*

$$\Omega_{j-k} \subseteq \Gamma_j \subseteq \Omega_{j+k}.$$

([Cou95] Proposition 8.3.2)

Korollar 5. *Sei M ein A_n-Modul und Γ eine gute Filtrierung bezüglich der Bernsteinfiltrierung $\mathcal{B}$. Dann ist $\Omega_k := B_k \Gamma_0$ auch eine gute Filtrierung von M bezüglich $\mathcal{B}$.*

Quellen

[Cou95] Coutinho: **A primer of algebraic D-modules**. Cambridge, 1995