Direktes Bild und Inverses Bild von D-Moduln

Konrad Voelkel

3. Juli 2009

Abstract Seien stets $X, Y \in \mathsf{Top}$, $f : X \to Y$ stetig und $\mathcal{F} \in \mathsf{Sh}_{/X}$ sowie $\mathcal{G} \in \mathsf{Sh}_{/Y}$. Wir untersuchen nun, wie sich, mittels f, $\mathcal{F}$ als Garbe auf Y und $\mathcal{G}$ als Garbe auf X betrachten lässt. Danach führen wir diese Betrachtung für $\mathcal{O}_X$-Moduln auf geringten Räumen $(X, \mathcal{O}_X)$ durch und schliesslich für $\mathcal{D}$-Moduln auf Varietäten.

1 Direktes Bild und Inverses Bild von O-Moduln

Wir wiederholen bekanntes

$$f^{-1} \dashv f_* \qquad \mathsf{Sh}_{/Y} \leftrightarrow \mathsf{Sh}_{/X}$$

Wir wollen das übertragen auf folgendes:

$$f^* \dashv f_* \qquad \mathcal{O}_Y\text{-}\mathsf{Mod} \leftrightarrow \mathcal{O}_X\text{-}\mathsf{Mod}$$

Und schließlich

$$i^+ \dashv i_+ \qquad \mathsf{Der}(\mathcal{D}_Y\text{-}\mathsf{Mod}) \leftrightarrow \mathsf{Der}(\mathcal{D}_X\text{-}\mathsf{Mod})$$

Das direkte Bild

Definition 1. Seien $X, Y \in \mathsf{Top}$ und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist $f_* : \mathsf{Sh}_{/X} \to \mathsf{Sh}_{/Y}$ mit $(f_*\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ ein Funktor, das **direkte Bild von Garben**. Auf Morphismen $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist f_* definiert als $f_*\varphi_U := \varphi_{f^{-1}U}$.

Ist nun $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum, so ist ein **Morphismus von geringten Räumen** eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zusammen mit einem Garbenmorphismus $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ in $\mathsf{Sh}_{/Y}$.

Für einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$ trägt $f_* \mathcal{M} \in \mathsf{Sh}_{/Y}$ eine $f_*\mathcal{O}_X$-Modulstruktur, wir erhalten also einen Funktor, das **direkte Bild von $\mathcal{O}_X$-Moduln**

$$f_* : \mathcal{O}_X\text{-}\mathsf{Mod} \to f_*\mathcal{O}_X\text{-}\mathsf{Mod}.$$

Der Funktor f_* auf Garben bzw. $\mathcal{O}_X$-Moduln ist linksexakt, denn $f_*\mathcal{F}_{f(x)} = \mathcal{F}_x$ und Kern- und Halmbildung bei einem Garbenmorphismus vertauschen.

Bemerkung.

- Für $c : X \to \mathsf{pt}$ ist $c_* \simeq \Gamma(X, -)$ (Globale Schnitte).
- Für $i : \mathsf{pt} \to Y$ mit $y := i(\mathsf{pt})$ ist $i_*\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathsf{pt})_{(y)}$ (Wolkenkratzergarbe).

- Für $i : A \hookrightarrow Y$ abgeschlossene Einbettung ist $i_* \mathcal{F}$ ein exakter Funktor, wie man auf Halmen sieht.
- Für $j : U \hookrightarrow Y$ offene Einbettung können auf $\partial j(U)$ Halme dazu kommen, daher ist j_* nicht rechtsexakt.

Das inverse Bild

Definition 2. Seien $X, Y \in \mathsf{Top}$ und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist $f^{-1} : \mathsf{Sh}_{/Y} \to \mathsf{Sh}_{/X}$ der Funktor, den wir naiv $(f^{-1}\mathcal{G})(U) := \mathcal{G}(f(U))$ definieren wollen. Allerdings ist $f(U)$ i.A. nicht offen, daher definieren wir das **inverse Bild von Garben**

$$f^{-1}\mathcal{G} := \left(U \mapsto \varinjlim_{f(U) \subseteq V \Subset X} \mathcal{G}(V) \right)^+$$

(wobei wir die Garbifizierung $^+$ durchführen müssen, weil i.A. sonst nur eine Prägarbe dabei herauskommt).

Auf Halmen gilt $(f^{-1}\mathcal{G})_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{f(x)}$, daher ist f^{-1} ein exakter Funktor.

Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ nun geringte Räume und $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ Morphismus von geringten Räumen. Ist $\mathcal{G} \in \mathcal{O}_Y\text{-}\mathsf{Mod}$, so ist $f^{-1}\mathcal{G} \in f^{-1}\mathcal{O}_Y\text{-}\mathsf{Mod}$, aber i.A. kein $\mathcal{O}_X$-Modul. Daher definieren wir das **inverse Bild von $\mathcal{O}_X$-Moduln**

$$f^* : \mathcal{O}_Y\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathcal{O}_X\text{-}\mathsf{Mod}, \quad f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \underset{f^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_X$$

(wobei $\mathcal{O}_X$ ein $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Modul ist, daher das Tensorprodukt dieser Garben definiert ist). Der Funktor f^* ist i.A. nur noch rechtsexakt, da das Tensorprodukt mit $\mathcal{O}_X$ über $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ i.A. nur rechtsexakt ist. Wenn dieses Tensorprodukt exakt ist, heißt $\mathcal{O}_X$ **flach über** $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ bzw. f ein **flacher Morphismus**.

Bemerkung.

- Für $c : X \to \mathsf{pt}$ ist $c^{-1}\mathcal{G}$ die konstante Garbe mit Schnitten $\mathcal{G}(\mathsf{pt})$ auf X.
- Für $c : (X, \mathcal{O}_X) \to (\mathsf{pt}, R)$ ist $c^*M = \Delta M \in \mathcal{O}_X\text{-}\mathsf{Mod}$ (Lokalisierung).
- Für $i : \mathsf{pt} \to Y$ mit $y := i(\mathsf{pt})$ und $\mathcal{G} \in \mathsf{Sh}_{/Y}$ ist $i^{-1}\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}_y$ (Halm).
- Für $i : (\mathsf{pt}, R) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ und $\mathcal{G} \in \mathcal{O}_Y\text{-}\mathsf{Mod}$ ist $i^*\mathcal{G} \equiv G_y$.
- Für $i : A \to Y$ abgeschlossene Einbettung ist i^* exakt.
- Für $j : U \to Y$ offene Einbettung ist $(j^*\mathcal{G})(V) \simeq \mathcal{G}(j(V))$ für $V \Subset U$.

2 Direktes und inverses Bild von D-Moduln

Links- und Rechts-$\mathcal{D}$-Moduln Für A_n können wir einen Antiautomorphismus definieren: $\varphi : A_n^\circ \xrightarrow{\sim} A_n$, der $X_i \mapsto X_i$ und $\partial_i \mapsto -\partial_i$ zur Definition hat. Man rechnet nach, dass φ die Kommutatorrelationen erfüllt und eine Basis auf eine Basis abbildet, damit ist φ ein Isomorphismus von Ringen. Das liefert eine Methode um A_n-Linksmoduln mit A_n-Rechtsmoduln zu identifizieren (via twisten mit φ).

Zurückziehen von $\mathcal{D}$-Moduln

Ein erster Versuch

Definition 3. Sei $\pi : X \to Y$ ein Morphismus von algebraischen Varietäten. Wir definieren den Funktor $\pi^+ : \mathcal{D}_Y\text{-Mod} \to \mathcal{D}_X\text{-Mod}$.

Zunächst lokal, also für X, Y affin und einen D_X-Modul M setze

$$\pi^+(M) := R(X) \underset{R(Y)}{\otimes} M$$

und erkläre eine D_X-Operation auf $\pi^+(M)$ durch

$$f'(f \otimes m) = f'f \otimes m, \qquad \xi(f \otimes m) = \xi f \otimes m + f\left(\sum_i \xi(x_i) \otimes \partial_i m\right)$$

wobei (x_i, ∂_i) ein Koordinatensystem in D_Y sein soll und $f' \in R(X)$ sowie $\xi \in \mathrm{Der}(X)$.

Für allgemeine Varietäten definieren wir nun

$$\pi^+(\mathcal{F}) := \mathcal{O}_X \underset{\pi^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} \pi^{-1}(\mathcal{F})$$

wobei die Operation von $\mathcal{D}_Y$ affin so wie auf D_Y definiert sein soll.

Achtung: bei Bernstein heißt dieser Funktor π^Δ.

Beispiel 1. Wir schauen uns die Operation am Beispiel des $\mathcal{D}$-Moduls der holomorphen Funktionen $\mathcal{H}$ auf $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ an, die auf $\mathbb{C}$ zurückgezogen werden. Es ist

$$\begin{aligned}
\pi^+\mathcal{H}(\mathbb{C}) &= \mathcal{O}_\mathbb{C}(\mathbb{C}) \underset{\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\mathbb{C}}(\mathbb{C})}{\otimes} \pi^{-1}\mathcal{H}(\mathbb{C}) \\
&= \mathbb{C}[X] \underset{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\mathbb{C}}\pi(\mathbb{C}))}{\otimes} \mathcal{H}\pi(\mathbb{C}) \\
&= \mathbb{C}[X] \underset{\mathbb{C}[X]}{\otimes} \mathcal{H}\pi(\mathbb{C})
\end{aligned}$$

Lassen wir nun den Differentialoperator $\partial \in \mathcal{D}_\mathbb{C}(\mathbb{C})$ auf ein Element des zurückgezogenen Moduls $X^2 \otimes h$ wirken, so ist das per definitionem:

$$\begin{aligned}
\partial(X^2 \otimes h) &= (\delta X^2) \otimes h + X^2\,(\partial(x) \otimes \partial h) \\
&= 2X \otimes h + X^2 \otimes h'
\end{aligned}$$

Also eine Variante der Kettenregel.

Eine elegantere Definition

Definition 4. Seien X, Y glatte Varietäten und $\varphi : X \to Y$ Morphismus. Dann setze

$$\mathcal{D}_{X\to Y} := \varphi^*(\mathcal{D}_Y) = \mathcal{O}_X \underset{\varphi^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} \varphi^{-1}\mathcal{D}_Y \in (\mathcal{O}_X, \varphi^{-1}\mathcal{D}_Y)\text{-Mod}.$$

Sind X und Y affin mit Koordinatenringen $R(X)$ und $R(Y)$, und nennen wir die globalen Schnitte von $\mathcal{D}_Y$ hier $D(Y)$, so führt das auf:

$$D_{X\to Y} := \Gamma(X, \mathcal{D}_{X\to Y}) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X \underset{\varphi^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} \varphi^{-1}\mathcal{D}_Y) = R(X) \underset{R(Y)}{\otimes} D(Y)$$

Lemma 1. *Man kann zeigen, dass es auf $\mathcal{D}_{X\to Y}$ eine natürliche $\mathcal{D}_X$-Linksoperation gibt, die verträglich mit der Links- und Rechtsmodul-Struktur ist. Damit ist $\mathcal{D}_{X\to Y}$ sogar ein $(\mathcal{D}_X, \varphi^{-1}\mathcal{D}_Y)$-Bimodul.*

Dazu betrachtet man die Garbe der Differentialoperatoren auf $\mathcal{D}_{X\to Y}$. Diese operiert auf $\mathcal{D}_{X\to Y}$ und enthält Differentialoperatoren auf der ersten Komponente $\mathcal{O}_X$. Betrachten wir nur die Differentialoperatoren, die zugleich Endomorphismen von $\varphi^{-1}\mathcal{D}_Y$ sind, so erhalten wir eine Garbe, die isomorph ist als Garbe filtrierter Ringe zu $\mathcal{D}_X$. Darüber ist dann die Operation erklärt.

□

Lemma 2. *Seien X, Y, Z glatte Varietäten und $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ Morphismen. Dann gilt:*

$$\mathcal{D}_{X\to Z} \simeq \mathcal{D}_{X\to Y} \underset{\varphi^{-1}\mathcal{D}_Y}{\otimes} \varphi^{-1}\mathcal{D}_{Y\to Z}.$$

als $(\mathcal{O}_X, (\psi\circ\varphi)^{-1}\mathcal{D}_Y)$-Bimoduln, wie man leicht nachrechnet und, mit etwas mehr Aufwand, als $(\mathcal{D}_X, (\psi\circ\varphi)^{-1}\mathcal{D}_Y)$-Bimoduln.

Bemerkung 1. Im Falle einer offenen Einbettung $j : U \hookrightarrow X$ ist $\mathcal{D}_{U\to X} \simeq \mathcal{D}_{X|U} \simeq \mathcal{D}_U$ als $(\mathcal{D}_U, j^{-1}\mathcal{D}_X)$-Bimoduln und damit auch $\mathcal{D}_{U\to X}$ **flach** über $\mathcal{D}_U$, was relevant wird fürs direkte Bild.

Definition 5. Seien X, Y glatte affine Varietäten und $\varphi : X \to Y$ Morphismus. Setze

$$\varphi^+ : D_Y\text{-Mod} \to D_X\text{-Mod}, \qquad \varphi^+(M) := D_{X\to Y} \underset{D_Y}{\otimes} M \qquad \text{inverses Bild}$$

$$\varphi_+ : D_X\text{-}^r\text{Mod} \to D_Y\text{-}^r\text{Mod}, \qquad \varphi_+(N) := N \underset{D_X}{\otimes} D_{X\to Y} \qquad \text{direktes Bild}$$

dann sind φ^+ und φ_+ rechtsexakte Funktoren.

Lemma 3.

$$D_{X\to Z} \simeq D_{X\to Y} \underset{D_Y}{\otimes} \varphi^{-1}D_{Y\to Z}. \quad \square$$

Korollar 1.

$$(\varphi^+ \circ \psi^+) = (\psi\circ\varphi)^+ \quad \textit{und} \quad (\psi_+ \circ \varphi_+) = (\psi\circ\varphi)_+ \quad \square$$

Definition 6. Für glatte nicht notwendig affine Varietäten setzen wir nun

$$\varphi^+ : \mathcal{D}_Y\text{-Mod} \to \mathcal{D}_X\text{-Mod}, \qquad \varphi^+(\mathcal{V}) := \mathcal{D}_{X\to Y} \underset{\varphi^{-1}\mathcal{D}_Y}{\otimes} \varphi^{-1}\mathcal{V} \qquad \text{inverses Bild}$$

und das ist ein rechtsexakter Funktor.

Vorschieben von $\mathcal{D}$-Moduln

Definition 7. Seien nun wieder X, Y glatte Varietäten und $\pi : X \to Y$ Morphismus.

Da nicht alle Funktionen integrierbar sind, Distributionen aber schon, sollten wir einen Funktor $\pi_+ : \mathcal{D}_X\text{-rMod} \to \mathcal{D}_Y\text{-rMod}$ suchen (denn Distributionen sind als Dual von Funktionen natürlicherweile Rechts-$\mathcal{D}$-Moduln).

Wir setzen

$$\pi_+(\mathcal{H}) := \pi_*(\mathcal{H} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{D}_{X\to Y})$$

wobei π_* ein direktes Bild in der Kategorie der Garben sein soll. Diese Definition trägt das Problem mit sich, dass $\otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}$ rechtsexakt ist und π_* linksexakt, der Funktor π_+ somit also weder links- noch rechtsexakt ist.

Wir wollen daher zur derivierten Kategorie übergehen:

$$\pi_+(\mathcal{H}) := \mathcal{R}\pi_*(\mathcal{H} \overset{\mathcal{L}}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{D}_{X\to Y})$$

Lemma 4. *Für eine offene Einbettung* $i : U \hookrightarrow X$ *ist* $\mathcal{D}_{U\to X} = \mathcal{D}_U$ *und daher* $i_+\mathcal{V} = \mathcal{R}i_*\mathcal{V}$.

□

Satz 1 (Kashiwara). *Sei* $i : A \hookrightarrow Y$ *eine abgeschlossene Einbettung. Die Funktoren* $i_+ : \mathcal{D}_A\text{-Mod} \to \mathcal{D}_Y\text{-AMod}$ *und* $i^+ : \mathcal{D}_Y\text{-AMod} \to \mathcal{D}_A\text{-Mod}$ *sind zueinander invers und eine Äquivalenz von Kategorien.*

□

3 Beispiele

Beispiel 2. Die einfachsten Beispiele erhalten wir nun durch zurückziehen und vorschieben entlang konstanter Abbildungen sowie Projektionen auf einen Punkt. Wie bei Garben finden wir hier altbekannte Funktoren wieder.

Beispiel 3. Das Zurückziehen eines $\mathcal{D}$-Moduls $\mathcal{G}$ auf $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ entlang der Inklusion eines Punktes $i : \{z_0\} \hookrightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$i^+\mathcal{G} = \mathcal{D}_{\{z_0\}\to\mathbb{P}^1} \underset{i^{-1}\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}}{\otimes} i^{-1}\mathcal{G} = \mathcal{O}_{\{z_0\}} \underset{i^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}{\otimes} i^{-1}\mathcal{G}\,.$$

Es ist $\Gamma(\{z_0\}, \mathcal{O}_{\{z_0\}}) = \mathbb{C}$ und $i^{-1}\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}_{z_0}$ der Halm.

$$\Gamma(\{z_0\}, i^+\mathcal{G}) = \mathbb{C} \underset{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1,z_0}}{\otimes} \mathcal{G}_{z_0} = \mathcal{G}_{z_0}\,.$$

Damit hat der Halm via i^+ eine $\mathcal{D}_{\{z_0\}}$-Modulstruktur bekommen.

Beispiel 4. Wir betrachten den Rechts-$\mathcal{D}$-Modul der holomorphen Funktionen $\mathcal{V}$ auf $\mathbb{C}$ und die Koordinatenabbildung $j : \mathbb{A}^1\mathbb{C} \to \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ mit $z \mapsto z$. Das Vorschieben ist gegeben durch

$$j_+(\mathcal{V}) = \pi_*(\mathcal{H} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{D}_{X\to Y})$$

und die Schnitte über $j(\mathbb{C})$ und den offenen Teilmengen sind genau die holomorphen Funktionen auf der Karte. Für offene Mengen, die den Punkt ∞ enthalten, ergibt sich aber etwas neues: Sei $V \underset{\circ}{\subseteq} \mathbb{P}^1$ mit $\infty \in V$. Dann ist

$$j_+\mathcal{V}(V) = \pi_*(\mathcal{V} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{D}_{X\to Y})(V) = \mathcal{V}(j^{-1}V) \underset{\mathcal{D}_X(j^{-1}V)}{\otimes} \mathcal{D}_{X\to Y}(j^{-1}V)$$

Die Mengen $j^{-1}V$ sind nun Teilmengen von $\mathbb{C}$, die eine beschränkte Menge nicht enthalten. Betrachtet man den Limes der Mengen V (immer kleinere V), so erhält man als Urbilder unter j Teilmengen von $\mathbb{C}$, die immer größere beschränkte Teilmengen nicht enthalten. Da eine holomorphe Funktion entweder konstant ist oder betragsweise gegen ∞ geht für $|z| \to \infty$, besteht der Halm von $j_+\mathcal{V}$ bei ∞ gerade aus den konstanten Funktionen, also $\mathbb{C}$, sowie den Keimen stetiger Funktionen, die außerhalb von ∞ holomorph sind.

4 Anhang

Eigentliche Abbildungen

Definition. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt **eigentlich**, wenn Urbilder von Kompakta wieder kompakt sind.

Lemma. $X \in \mathsf{Top}$ *kompakt* $\Leftrightarrow$ $c : X \to \mathsf{pt}$ *eigentlich.*
Ist X kompakt und Y Hausdorffraum, so ist jedes $f : X \to Y$ eigentlich und abgeschlossen. Das macht die Theorie in der differentialgeometrischen Variante deutlich einfacher.

Geringte Räume

Definition. Ein **geringter Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$, wobei $X \in \mathsf{Top}$ (ein topologischer Raum) und $\mathcal{O}_X \in \mathsf{Ring}_{/X}$ (eine Garbe von Ringen auf X) ist. Morphismen von geringten Räumen sind Paare $(f, f^\sharp)$ mit $f : X \to Y$ stetig und $f^\sharp : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ Garbenmorphismus.

Quasikohärente und kohärente Garben

Definition. Sei X eine Varietät (oder ein Schema) und $\mathcal{M} \in \mathcal{O}_X\text{-}\mathsf{Mod}$ (eine Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln). Dann heißt $\mathcal{M}$ **quasikohärent**, wenn

1. für X affin: $\mathcal{M} \simeq \Delta M$ für ein $M \in \mathcal{O}_X(X)\text{-}\mathsf{Mod}$
2. sonst: falls für jeden Punkt eine affine offene Umgebung existiert, die 1 erfüllt.

Definition. Sei X eine Varietät (oder ein Schema) und $\mathcal{M} \in \mathcal{O}_X\text{-}\mathsf{Mod}$. Dann heißt M **kohärent**, wenn

1. für X affin: $\mathcal{M} \simeq \Delta M$ für ein $M \in \mathcal{O}_X(X)\text{-}\mathsf{Mod}^{e.e.}$ (e.e. = endlich erzeugt).
2. sonst: falls für jeden Punkt eine affine offene Umgebung existiert, die 1 erfüllt.

Lemma. *Natürlich sind kohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln stets quasikohärent. Sowohl die kohärenten als auch die quasikohärenten bilden eine abelsche Kategorie.*

Differentialoperatoren

Definition. Sei X eine Varietät über k. Ein k-linearer Endomorphismus $D : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U)$ heißt **von Ordnung** k, wenn für alle $f \in \mathcal{O}_X(U)$ der Operator $[D, f\cdot]$ von Ordnung $k-1$ ist. D heißt von Ordnung 0, wenn $[D, f\cdot] = 0$ für alle $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Ist ein Endomorphismus $D : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ für alle affinen $U \circeq X$ von endlicher Ordnung, so heißt D **Differentialoperator**. Im affinen Fall $\mathbb{C}^n$ ist die Menge der Differentialoperatoren genau $A_n(\mathbb{C})$, die Weylalgebra. Im allgemeinen Fall bilden die Differentialoperatoren eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X, die wir mit $\mathcal{D}_X$ bezeichnen.

Direktes und inverses Bild mit kompaktem Träger

Definition 8. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ geringte Räume und $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ Morphismus von geringten Räumen. Dann ist $f_! : \mathsf{Ab}_{/X} \to \mathsf{Ab}_{/Y}$ der Funktor, genannt **direktes Bild mit kompaktem Träger** $(f_!\mathcal{F})(U) := \{s \in (f_*\mathcal{F})(U) \mid \operatorname{supp} s \text{ kompakt}\}$. Dabei ist $\operatorname{supp} s = \{x \in U \mid s_x \neq 0\}$ der **Träger**. Auf Morphismen macht $f_!$ das selbe wie f_*, nur eingeschränkt auf die jeweils kleineren Definitionsbereiche. Damit ist $f_!$ Unterfunktor von f_*, deshalb ist $f_!$ i.A. auch nur linksexakt.

Für einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$ trägt $f_!\mathcal{M}$ natürlich eine $f_*\mathcal{O}_X$-Modulstruktur, aber sogar eine $f_!\mathcal{O}_X$-Modulstruktur. Damit definiert $f_!$ einen Funktor, das **direkte Bild mit kompaktem Träger** von $\mathcal{O}_X$-Moduln

$$f_! : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \to f_!\mathcal{O}_X\text{-Mod}$$

Und $f_!$ auf $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ ist linksexakt.

Bemerkung.

- Für $c : X \to \mathrm{pt}$ ist $c_! \simeq \Gamma_c(X, -)$ (Globale Schnitte mit kompaktem Träger).
- Für $i : A \hookrightarrow Y$ abgeschlossene Einbettung ist $i_! = i_*$.
- Allgemein ist für jede eigentliche Abbildung $f : X \to Y$ stets $f_! = f_*$.

Definition 9. Zum Funktor $f_! : \mathrm{Sh}_{/X} \to \mathrm{Sh}_{/Y}$ betrachten wir den Rechtsderivierten $\mathcal{R}f_! : \mathrm{Der}(\mathrm{Sh}/X) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Sh}_{/Y})$ und nehmen dazu den rechtsadjungierten Funktor, den wir **außerordentliches inverses Bild von Garben** $f^! = \mathcal{R}f^! : \mathrm{Der}(\mathrm{Sh}_{/Y}) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Sh}_{/X})$ nennen. I.A. hat $f_!$ keinen Rechtsadjungierten, daher gibt es $f^!$ i.A. nur auf den derivierten Kategorien.

Das funktioniert analog für $f_! : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \to \mathcal{O}_Y\text{-Mod}$, wir erhalten auch hier ein **außerordentliches inverses Bild** $\mathcal{R}f^! : \mathrm{Der}(\mathcal{O}_Y\text{-Mod}) \to \mathrm{Der}(\mathcal{O}_X\text{-Mod})$.

Bemerkung.

- Für $i : A \to Y$ abgeschlossene Einbettung ist $i^!$ nur linksexakt.
- Für $j : U \to Y$ offene Einbettung ist $j^! = j^*$, also gibt es $j^!$ auch ohne derivierte Kategorien und $j^!$ ist exakt.