Derivierte Kategorien, Lokalisierung in Kategorien, triangulierte Struktur, Quotienten von triangulierten Kategorien

Konrad Völkel, AG Garbenkohomologie
bei Prof. Soergel im Wintersemester 08/09
an der Uni Freiburg

2. Februar 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Derivierte Kategorien

1.1 Quotienten triangulierter Kategorien (nach Verdiersystemen)

Definition 3. Sei $\mathcal{C}$ eine triangulierte Kategorie und $\mathcal{N}$ eine Teilklasse von $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Dann heißt ein Paar $(\mathcal{C}/\mathcal{N}, \mathrm{can})$, mit $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ einer Kategorie und $\mathrm{can} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{N}$ ein Funktor, **Quotient** von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{N}$, wenn

1. Jedes Objekt aus $\mathcal{N}$ wird unter Q auf 0 abgebildet.
2. Ist $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor, der alle Objekte aus $\mathcal{N}$ auf 0 abbildet, so faktorisiert F eindeutig über can, d.h. es gibt genau ein $\widetilde{F} : \mathcal{C}/\mathcal{N} \to \mathcal{D}$ sodass $F = \widetilde{F} \circ \mathrm{can}$.

Definition 4. Sei $\mathcal{C}$ eine triangulierte Kategorie und $\mathcal{N}$ eine Teilmenge von $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. $\mathcal{N}$ heißt **trianguliertes System**, wenn **[K-S] 1.6.6.**

(N1) $0 \in \mathcal{N}$.

(N2) $X \in \mathcal{N} \Leftrightarrow [1]X \in \mathcal{N}$.

(N3) Ist $X \to Y \to Z \to [1]X$ ausgezeichnetes Dreieck mit zwei Objekten in $\mathcal{N}$, so auch das Dritte.

$\mathcal{N}$ heißt **Verdiersystem**, wenn es ein trianguliertes System ist, dass zu jedem Objekt auch alle seine direkten Summanden enthält.

Bemerkung 1. $\mathsf{Hot}^+_{\mathcal{A}}$, $\mathsf{Hot}^-_{\mathcal{A}}$, $\mathsf{Hot}^b_{\mathcal{A}}$ sind Verdiersysteme in $\mathsf{Hot}_{\mathcal{A}}$.

Beweis. Klar: $0 \in \mathsf{Hot}^+_{\mathcal{A}}$, $X^\bullet \in \mathsf{Hot}^+_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow [1]X^\bullet \in \mathsf{Hot}^+_{\mathcal{A}}$ und wenn in einem ausgezeichneten Dreieck $X \to Y \to Z \to$ bereits $X, Y \in \mathsf{Hot}^+\mathcal{A}$ sind, so auch der Abbildungskegel und damit Z.

Da direkte Summanden in $\mathcal{A}$ genau dann 0 sind, wenn die summierten Faktoren bereits 0 sind, ist $\mathsf{Hot}^+_{\mathcal{A}}$ auch ein Verdiersystem. Völlig analog verfahren wir mit $\mathsf{Hot}^-_{\mathcal{A}}$ und $\mathsf{Hot}^b_{\mathcal{A}}$. $\square$

Lemma 3. *Sei $\mathcal{N}$ ein trianguliertes System in einer triangulierten Kategorie $\mathcal{C}$. Dann ist* **[K-S] 1.6.7.**

$$S(\mathcal{N}) := \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid K(f) \in \mathcal{N}\}$$

ein multiplikatives System in $\mathcal{C}$.

Beweis.

(S1) Es ist $0 \in \mathcal{N}$ also wegen $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \to 0 \to$ ausgezeichnet auch $\mathrm{id}_X \in S(\mathcal{N})$.

(S2) $S(\mathcal{N})$ ist stabil unter Komposition, denn mit dem Oktaederaxiom finden wir für $f, g \in S(\mathcal{N})$ zu den ausgezeichneten Dreiecken

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow [1]X$$

$$Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X' \longrightarrow [1]Y$$

$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \longrightarrow Y' \longrightarrow [1]X$$

ein ausgezeichnetes Dreieck $Z' \to Y' \to X' \to [1]Z'$ und da $Z', X' \in \mathcal{N}$, muss mit (N3) auch $Y' \in \mathcal{N}$ sein, also ist $g \circ f \in S(\mathcal{N})$.

(S3) Nun wollen wir einen Winkel mit $s \in S(\mathcal{N})$ ergänzen zu einem kommutativen Diagramm mit $t \in S$:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dashed, "t"] \arrow[d, dashed] & Y \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}$$

dazu betrachten wir das ausgezeichnete Dreieck $X \xrightarrow{s} Z \xrightarrow{k} X' \to [1]X$ mit $X' \in \mathcal{N}$. Dann existiert ein ausgezeichnetes Dreieck $W \to Y \xrightarrow{k \circ f} X' \to [1]W$. Durch Ergänzen dieses Diagramms bekommen wir einen Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "t"] \arrow[d, dashed] & Y \arrow[r, "k\circ f"] \arrow[d, "f"] & X' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{X'}"] & {[1]W} \arrow[d, dashed] \\ X \arrow[r, "s"] & Z \arrow[r, "k"] & X' \arrow[r] & {[1]X} \end{tikzcd}$$

und wegen $X' \in \mathcal{N}$ ist $t \in S(\mathcal{N})$.

(S4) Sind $f, g : X \to Y$ und $s : Y \to Z$ mit $s \in S$ gegeben und $s \circ f = s \circ g$, d.h. $s \circ (f - g) = 0$, so betrachten wir das ausgezeichnete Dreieck $W \xrightarrow{r} Y \xrightarrow{s} Z \to [1]W$ und benutzen die lange exakte kontravariante Hom-Sequenz (Lemma 13) für X:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to & \mathcal{T}(X, W) & \to & \mathcal{T}(X, Y) & \xrightarrow{s^*} & \mathcal{T}(X, Z) & \to & \mathcal{T}(X, [1]W) & \to \cdots \\ & h & \mapsto & (f - g) & \mapsto & 0 & & & \end{array}$$

Damit haben wir $h : X \to W$ mit $(f - g) = r \circ h$ gefunden. Nun bilden wir das ausgezeichnete Dreieck über h:

$$V \xrightarrow{t} X \xrightarrow{h} W \to [1]V$$

und der so gefundene Pfeil $t \in S(\mathcal{N})$ erfüllt $(f - g) \circ t = r \circ h \circ t = 0$. □

Satz 2. *Sei $\mathcal{C}$ eine kleine triangulierte Kategorie und $\mathcal{N}$ ein Verdiersystem in $\mathcal{C}$, dann gibt es einen Quotienten* can $: \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{N}$. *Es gibt eine triangulierte Struktur auf dem Quotienten, die* can *zu einem triangulierten Funktor macht. Die von* can *zu* 0 *gemachten Objekte sind genau die in $\mathcal{N}$ und die zu Isomorphismen gemachten Morphismen sind genau die mit Abbildungskegel aus $\mathcal{N}$.*

Beweis. Setze $\mathcal{C}/\mathcal{N} := \mathcal{C}_{S(\mathcal{N})}$ und can der bekannte Lokalisierungsfunktor.

Eine $\mathbb{Z}$-Operation $[1]$ erhalten wir über den Funktor $[1] : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, indem wir sehen, dass $\text{can} \circ [1]$ eindeutig über can faktorisiert in $\widetilde{\text{can} \circ [1]}$ sodass $\text{can} \circ [1] = \widetilde{\text{can} \circ [1]} \circ \text{can}$. Wir nennen $\widetilde{\text{can} \circ [1]} : \mathcal{C}_S \to \mathcal{C}_S$ wieder $[1]$. Zeichne in $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ ein Dreieck aus, wenn es zum Bild eines ausgezeichneten Dreiecks von $\mathcal{C}$ isomorph ist.

Wenn $X \in \mathcal{C}/\mathcal{N}$ isomorph zu 0 ist, so ist entweder schon $X \in \mathcal{C}$ Null, also auch $X \in \mathcal{N}$, oder es gibt $s : 0 \to X$ bzw. $t : X \to 0$ in $\mathcal{C}$ mit Abbildungskegel in $\mathcal{N}$. Dieser ist aber X, also $X \in \mathcal{N}$.

Die Axiome für eine triangulierte Kategorie sind erfüllt. □

1.2 Die derivierte Kategorie

Definition. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ von einer triangulierten Kategorie in eine abelsche Kategorie heißt **kohomologisch**, wenn er additiv ist und ein ausgezeichnetes Dreieck $X \to Y \to Z \to [1]X$ in eine exakte Sequenz $F(X) \to F(Y) \to F(Z)$ überführt.

Lemma. *Der Funktor* $\mathcal{H}^0 : \mathsf{Hot}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$ *ist ein kohomologischer Funktor.*

Beweis. Ohne Einschränkungen ist das ausgezeichnete Dreieck $X \xrightarrow{f} Y \to K(f) \to [1]X$. Es genügt, zu zeigen, dass $\mathcal{H}^0(Y) \to \mathcal{H}^0(K(f)) \to \mathcal{H}^0([1]X)$ exakt ist. Da $Y \hookrightarrow K(f) \twoheadrightarrow [1]X$ eine kurze exakte Sequenz in $\mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}$ ist, folgt das aus der langen exakten Homologiesequenz. □

Lemma 4.

$$\mathcal{N} := \{X \in \mathsf{Hot}_{\mathcal{A}} \mid \forall n \in \mathbb{Z} : \mathcal{H}^n(X) = 0\}$$

ist ein Verdiersystem in $\mathsf{Hot}_{\mathcal{A}}$*, genannt* ***System der azyklischen Komplexe*** *und* $S(\mathcal{N})$ *sind genau die Quasiisomorphismen in* $\mathsf{Hot}_{\mathcal{A}}$*.*

Beweis. Klar: $0 \in \mathcal{N}$, $\forall n \in \mathbb{Z} : \mathcal{H}^n X = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z} : \mathcal{H}^{n+1} X = 0$ und ein Dreieck $X \to Y \to Z \to$ mit X, Y azyklisch liefert über die lange exakte Homologiesequenz Z azyklisch.

Da $\mathcal{H}^n$ additiv ist, ist $\mathcal{N}$ auch Verdiersystem. □

Definition 5. Die **derivierte Kategorie** von einer kleinen abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist definiert als

$$\mathsf{Der}_{\mathcal{A}} := \mathsf{Hot}_{\mathcal{A}} / \mathcal{N}\,.$$

Analog zu $\mathsf{Hot}^+_{\mathcal{A}}$, $\mathsf{Hot}^-_{\mathcal{A}}$, $\mathsf{Hot}^b_{\mathcal{A}}$ definieren wir nun $\mathsf{Der}^+_{\mathcal{A}} := \mathsf{Hot}^+_{\mathcal{A}} / \mathcal{N}^+$ mit $\mathcal{N}^+ := \mathcal{N} \cap \mathsf{Hot}^+_{\mathcal{A}}$ und ebenso $\mathsf{Der}^-_{\mathcal{A}}$ und $\mathsf{Der}^b_{\mathcal{A}}$. Diese Kategorien sind alle trianguliert.

Der Funktor $\mathcal{H}^n : \mathsf{Hot}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$ faktorisiert über $\mathrm{can} : \mathsf{Hot}_{\mathcal{A}} \to \mathsf{Der}_{\mathcal{A}}$, den induzierten Funktor bezeichnen wir wiederum mit $\mathcal{H}^n$. Jedes ausgezeichnete Dreieck in $\mathsf{Der}_{\mathcal{A}}$ liefert eine lange exakte Homologiesequenz und ein Morphismus ist iso genau dann wenn er Isomorphismen auf allen $\mathcal{H}^n$ induziert.

Lemma 5. *Gegeben eine k.e.S.* $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ *von Komplexen in einer kleinen abelschen Kategorie* $\mathcal{A}$ *ist das* ***zugeordnete Dreieck*** *in* $\mathsf{Der}_{\mathcal{A}}$ *ausgezeichnet:*

$$X \to Y \to Z \to [1]X$$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass das Dreick isomorph zu einem Dreieck $X' \xrightarrow{f'} Y' \to K(f') \to [1]X'$ ist. Betrachte in $\mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & K(f) \arrow[r] \arrow[d, "{(0,g)}"] & {[1]X} \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & {[1]X}
\end{tikzcd}$$

und die k.e.S. von Kettenkomplexen

$$K(\mathrm{id}_X) \hookrightarrow K(f) \twoheadrightarrow Z$$

die liefert, dass $(0, g)$ ein Quasiiso ist, denn $K(\mathrm{id}_X)$ ist azyklisch (da $\mathrm{Ker}(d) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_X) = 0$), also 0 in der derivierten Kategorie. □

1.3 Derivierte Kategorien über Auflösungen

Definition 6. Sei $\mathcal{T}$ eine triangulierte Kategorie und $\mathcal{N} \subseteq \operatorname{Ob}\mathcal{T}$. Dann setze

$$\mathcal{N}^{\perp} := \{I \in \mathcal{T} \mid \forall N \in \mathcal{N} : \mathcal{T}(N, I) = 0\}$$

$$^{\perp}\mathcal{N} := \{P \in \mathcal{T} \mid \forall N \in \mathcal{N} : \mathcal{T}(P, N) = 0\}$$

Für $\mathcal{N}$ das Verdiersystem der azyklischen Komplexe einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ nennen wir die Objekte von $\mathcal{N}^{\perp}$ **homotopieinjektiv** und die Objekte von $^{\perp}\mathcal{N}$ **homotopieprojektiv**.

Lemma 6. *$\mathcal{N}^{\perp}$ und $^{\perp}\mathcal{N}$ sind stets Verdiersysteme.*

Beweis. Klar: $0 \in \mathcal{N}^{\perp}$, $I \in \mathcal{N}^{\perp} \implies (\forall N \in \mathcal{N} : 0 = \mathcal{T}(N, I) = \mathcal{T}([1]N, [1]I)) \implies [1]I \in \mathcal{N}^{\perp}$, die lange exakte Hom-Sequenz liefert für ein ausgezeichnetes Dreieck $X \to Y \to Z \to$ in $\mathcal{T}$ mit zwei Objekten in $\mathcal{N}^{\perp}$, dass auch $Z \in \mathcal{N}^{\perp}$.

Da $\mathcal{T}(N, -)$ ein additiver Funktor ist, ist $\mathcal{N}^{\perp}$ auch ein Verdiersystem. Völlig analog verfahren wir mit $^{\perp}\mathcal{N}$. ☐

Lemma 7. *Sei $\mathcal{T}$ eine kleine triangulierte Kategorie und $\mathcal{N}$ ein Verdiersystem darin. Dann ist*

1. *der restringierte Quotientenfunktor $\mathcal{N}^{\perp} \to \mathcal{T} / \mathcal{N}$ volltreu und*

2. *es sind äquivalent:*
   a) *für jedes $X \in \mathcal{T}$ existiert ein ausgezeichnetes Dreieck $N \to X \to I \to [1]N$ mit $N \in \mathcal{N}$ und $I \in \mathcal{N}^{\perp}$.*
   b) *$\mathcal{N}^{\perp} \to \mathcal{T} / \mathcal{N}$ ist eine Äquivalenz von Kategorien.*
   c) *$Q := \mathrm{can} : \mathcal{T} \to \mathcal{T} / \mathcal{N}$ besitzt einen Rechtsadjungierten.*

3. *Sind diese Bedingungen erfüllt, so liefert für jede Quasiinverse $R : \mathcal{T} / \mathcal{N} \to \mathcal{N}^{\perp}$ die kanonische Transformation $\mathrm{Id} \Rightarrow QR$ eine Adjunktion (Q, R).*

Beweis.

1. Q liefert für alle $I \in \mathcal{N}^{\perp}$ und $X \in \mathcal{T}$ eine Injektion $\tau : \mathcal{T}(X, I) \hookrightarrow (\mathcal{T} / \mathcal{N})(X, I)$. Wenn es einen Morphismus $(s, X', f) \in (\mathcal{T} / \mathcal{N})(X, I)$ gibt, so bilden wir über s das ausgezeichnete Dreieck (mit $N \in \mathcal{N}$)

   $$N \to X' \xrightarrow{s} X \to [1]N$$

   und wenden die lange exakte kontravariante Hom-Sequenz in $\mathcal{T}$ auf I an

   $$0 = \mathcal{T}(N, I) \leftarrow \mathcal{T}(X', I) \xleftarrow{s^*} \mathcal{T}(X, I) \leftarrow \mathcal{T}([1]N, I) = 0$$

   um einen Isomorphismus zu erhalten, der für f ein $g \in \mathcal{T}(X, I)$ liefert, sodass $f = s^*(g) = g \circ s$. Also ist $(s, X', f) \sim (s, X', g \circ s) \sim (\mathrm{id}_X, X, g)$ und liegt damit im Bild von τ.

2.

a) $\Rightarrow$ b): Jeder Morphismus $X \to I$ induziert einen Isomorphismus in $\mathcal{T} / \mathcal{N}$, denn für $f \in \mathcal{T}(X, I)$:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & I \arrow[r] \arrow[d] & {[1]N} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & {[1]X} \\
& X \arrow[r, "f"] & I \arrow[r] & K(f) \arrow[r] & {[1]X}
\end{tikzcd}$$

also $K(f) \in \mathcal{N}$, damit $(f, X, \mathrm{id}_X) \in (\mathcal{T}/\mathcal{N})(I, X)$. Mit dieser Erkenntnis definieren wir einen Funktor $R : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{N}^\perp$ durch

$$R(X) := \begin{cases} X, & X \in \mathcal{N}^\perp, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{für } (s, X', f) \in (\mathcal{T}/\mathcal{N})(X, Y) \text{ setze } R(s, X', f) := \begin{cases} f \circ s^{-1}, & X \in \mathcal{N}^\perp, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Betrachten wir $Q|_{\mathcal{N}^\perp}$, so ist $(R \circ Q)(X) = X$ und $(R \circ Q)(f) = R(\mathrm{id}_X, X, f) = f$, also ist $RQ = \mathrm{Id}_{\mathcal{N}^\perp}$. Umgekehrt ist $(Q \circ R)(X) = X$ und

$$(Q \circ R)(s, X', f) = Q(f \circ s^{-1}) = (\mathrm{id}_X, X, f \circ s^{-1}) \sim (s, X', f \circ s^{-1} \circ s)$$

also ist $QR = \mathrm{Id}_{\mathcal{T}/\mathcal{N}}$. Wir haben also einen Inversen gefunden.

b) $\Rightarrow$ *c)*: Jeder Quasiinverse R zur Äquivalenz liefert einen Rechtsadjungierten von Q über τ und die Äquivalenz:

$$\mathcal{T}(-, R-) \xRightarrow{\sim} (\mathcal{T}/\mathcal{N})(Q-, QR-) \xRightarrow{\sim} (\mathcal{T}/\mathcal{N})(Q-, -)$$

c) $\Rightarrow$ *a)*: Ist R Rechtsadjungierter von Q, so ist das Bild von R in $N^\perp$. Da $Q|_{\mathcal{N}^\perp}$ wegen τ volltreu ist, haben wir $\varepsilon : X \xrightarrow{\sim} RQX$ für alle $X \in \mathcal{T}/\mathcal{N}$, also $K(\varepsilon) = 0 \in \mathcal{T}/\mathcal{N}$ und wegen Satz 2 gehört $K(\varepsilon) \in \mathcal{T}$ zu $\mathcal{N}$. Also haben wir

$$N \to X \to I \to [1]N \text{ ausg.Dr. in } \mathcal{T} \text{ mit } N = K(\varepsilon) \in \mathcal{N},\ I = RQX \in \mathcal{N}^\perp.$$

3. Klar wegen des Beweises *b)* $\Rightarrow$ *c)*. $\square$

Definition 7. Sei $\mathcal{A}$ eine kleine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven und $i\,\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ die Unterkategorie aller injektiven Objekte. Sei $A^\bullet \in \mathsf{Hot}^+_{\mathcal{A}}$. Eine **injektive Auflösung** von $A^\bullet$ ist ein Quasiisomorphismus $A^\bullet \to I^\bullet$ in einen Komplex $I^\bullet \in \mathsf{Hot}^+_{i\mathcal{A}}$.

Lemma 8. *Gegeben ein kartesisches Diagramm in einer abelschen Kategorie*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

so gilt:

1. $\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(g)$.
2. *Ist g Epi, so auch f.*
3. *Sind f, g Monos, so induzieren sie einen Mono zwischen ihren Kokernen.*
4. *f, g induzieren einen Mono zwischen ihren Kokernen.*

Dasselbe gilt dual für kokartesische Diagramme, insbesondere induzieren dort f, g stets einen Epi zwischen ihren Kokernen.

Beweis. Übung. Für den zweiten Schritt setze $X_0 := \mathrm{Im}(W \to X)$ und $X_1 := \mathrm{Coker}(X_0 \hookrightarrow X)$ und betrachte die lange exakte Homologiesequenz für $X_0 \times_Z Y \hookrightarrow X \times_Z Y \twoheadrightarrow X_1 \times Y$. Für den letzten Schritt faktorisiere f, g jeweils über ihr Bild. Dualisieren ist klar. $\square$

Proposition. *Sei $\mathcal{A}$ eine kleine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven, dann existiert für jeden Komplex $A^\bullet \in \mathsf{Hot}^+_{\mathcal{A}}$ eine injektive Auflösung $A^\bullet \to I^\bullet$.*

Beweis. Die Induktionsvorraussetzung soll die Situation sein:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_A"] & A^p \arrow[r] \arrow[d] & A^{p+1} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_I"] & I^p & &
\end{tikzcd}$$

sodass $\mathcal{H}^q A \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q I$ induziert wird für $q < p$ und $A^p \to I^p$ einen Monomorphismus zwischen den Kokernen von d_A^{p-1} und d_I^{p-1} induziert.

Es gibt ein $q \in \mathbb{Z}$, sodass $A^p = 0$ für $p \leq q$. Dort ist die Induktionsvorraussetzung erfüllt.

Im Induktionsschritt bilden wir nun den Pushout P und eine injektive Einbettung $P \hookrightarrow I^{p+1}$ wie im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_A"] & A^p \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & A^{p+1} \arrow[r] \arrow[dd, hook, dashed] & \cdots \\
& & \mathrm{Coker}(d_A) \arrow[ur] \arrow[dd, hook] & & \\
\cdots \arrow[r, "d_I"] & I^p \arrow[dr] & & P \arrow[d, hook, dotted] & \\
& & \mathrm{Coker}(d_I) \arrow[ur, dashed] & I^{p+1} &
\end{tikzcd}$$

und sehen, dass $\mathrm{Coker}(d_A) \to \mathrm{Coker}(d_I)$ nach Induktionsvorraussetzung Mono und nach dualisiertem Lemma 8 ein Epi ist. Also induziert der nun konstruierte Kettenmorphismus $A \to I$ auf der p-ten Homologie einen Isomorphismus. Wegen $\mathrm{Coker}(d_A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}(I^p \to P) \hookrightarrow \mathrm{Coker}(I^p \to I^{p+1})$ induziert unser neuer Morphismus $A^{p+1} \to I^{p+1}$ auf den Kokernen der Randoperatoren einen Mono und die Induktion ist beendet. $\square$

Satz 3. *Der Quotientenfunktor $Q : \mathsf{Hot}^+_{\mathcal{A}} \to \mathsf{Der}^+_{\mathcal{A}}$ liefert eine Äquivalenz von Kategorien*

$$Q|_{i\mathcal{A}} : \mathsf{Hot}^+_{i\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Der}^+_{\mathcal{A}}$$

und für jeden Quasiinversen R dieser Äquivalenz definiert die Transformation $\mathrm{Id}_{\mathsf{Der}^+_{\mathcal{A}}} \Rightarrow QR$ eine Adjunktion (Q, R).

Beweis. Sei $\mathcal{N}$ wieder das Verdiersystem der azyklischen Komplexe. Das Hauptlemma der homologischen Algebra sagt für $I \in \mathsf{Hot}^+_{i\mathcal{A}}$ und $N \in \mathcal{N}$:

$$\mathsf{Hot}_{\mathcal{A}}(N, I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(\mathcal{H}^0 N, \mathcal{H}^0 I) = 0$$

also $\mathsf{Hot}^+_{i\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{N}^\perp$.

Der Funktor $Q|_{i\mathcal{A}} : \mathsf{Hot}^+_{i\mathcal{A}} \to \mathsf{Der}^+_{\mathcal{A}}$ ist volltreu, da nach Lemma 7 der Funktor $Q|_{\mathcal{N}^\perp} : \mathsf{Hot}^+\mathcal{N}^\perp \to \mathsf{Der}^+_{\mathcal{A}}$ volltreu ist. Da jeder Komplex $X \in \mathsf{Hot}^+_{\mathcal{A}}$ eine injektive Auflösung $X \to I$ hat, finden wir stets ein ausgezeichnetes Dreieck $N \to X \to I \to [1]N$ mit $N \in \mathcal{N}$. Wiederum nach Lemma 7 induziert $Q|_{i\mathcal{A}}$ eine Äquivalenz $\mathsf{Hot}^+_{i\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}^\perp$ mit der gewünschten Eigenschaft. $\square$

Korollar 2. *Es gibt eine Transformation von Bifunktoren*

$$\mathcal{A}^{[i]}(-,-) \overset{\sim}{\Longrightarrow} \mathsf{Der}^+_{\mathcal{A}}(-,[i]-)$$

Beweis. Nach Definition gilt für injektive Auflösungen $M \hookrightarrow I^*$ und $N \hookrightarrow J^*$:

$$\mathcal{A}^{[i]}(M,-) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M,-) = R^i\mathcal{A}(M,-)$$

Die nullte Homologie des Hom-Komplexes sind genau die Morphismen in der Homotopiekategorie:

$$\mathcal{A}^{[i]}(M,N) = \mathcal{H}^i(M,J^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0(M,[i]J^*) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hot}^+_{\mathcal{A}}(M,[i]J^*)$$

Ersetzen wir M durch seine Auflösung, erhalten wir mit Satz 3

$$\cdots \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hot}^+_{i\,\mathcal{A}}(I^*,[i]J^*) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Der}^+_{\mathcal{A}}(I^*,[i]J^*) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Der}^+_{\mathcal{A}}(M,[i]N)$$

und das alles natürlich in M und N, d.h. wir haben eine Transformation von Bifunktoren

$$\mathcal{A}^{[i]}(-,-) \overset{\sim}{\Longrightarrow} \mathsf{Der}^+_{\mathcal{A}}(-,[i]-).$$

□

Bemerkung 2. Man kann jetzt einsehen, dass für einen parakompakten lokal zusammenziehbaren Raum der Isomorphismus

$$H^*_{\mathrm{sing}}X \xrightarrow{\sim} H^*(X;\mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Ab}^{[*]}_{/X}(\mathbb{Z}_X)$$

ein Ringisomorphismus ist, d.h. das $\cup$-Produkt entspricht der Verknüpfung von Morphismen in den Selbsterweiterungen.

2 Anhang I - Vorraussetzungen

2.1 Adjunktionen und volltreue Funktoren

Lemma 9. *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien und $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sowie $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren.*
Jede Transformation $\alpha : \mathcal{B}(L-,-) \Rightarrow \mathcal{A}(-,R-)$ von Funktoren $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B} \to \mathsf{Ens}$ liefert eine Transformation $\widehat{\alpha} : \mathrm{Id}_\mathcal{A} \Rightarrow RL$ von Funktoren $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ durch die Vorschrift $\widehat{\alpha}_X := \alpha_{X,LX}(\mathrm{id}_{LX})$, d.h. $\widehat{\alpha}$ ist das Bild von id_{LX} unter der Abbildung $\alpha_{X,LX} : \mathcal{B}(LX, LX) \to \mathcal{A}(X, RLX)$. Jede Transformation $\tau : \mathrm{Id}_\mathcal{A} \Rightarrow RL$ liefert eine Transformation $\widetilde{\tau} : \mathcal{B}(L-,-) \Rightarrow \mathcal{A}(-,R-)$ von Funktoren $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B} \to \mathsf{Ens}$ durch die Komposition der Abbildungen

$$\widetilde{\tau}_{X,Y} : \mathcal{B}(LX,Y) \xrightarrow{R} \mathcal{A}(RLX, RY) \xrightarrow{\tau_X} \mathcal{A}(X, RY)$$

Dies liefert eine Bijektion

$$\mathrm{Trans}(\mathcal{B}(L-,-), \mathcal{A}(-,R-)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Trans}(\mathrm{Id}, RL)$$

Lemma 10. *Gegeben eine Adjunktion α von Funktoren (L,R) mit $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, erhalten wir nach dem vorigen Lemma Transformationen $\widehat{\alpha} : \mathrm{Id}_\mathcal{A} \Rightarrow RL$,genannt **Einheit**, und $\check{\alpha} : LR \Rightarrow \mathrm{Id}_\mathcal{B}$, genannt **Koeinheit**. Dann ist die Verknüpfung $(\check{\alpha}L) \circ (L\widehat{\alpha})$ die identische Transformation $L \Rightarrow L$ und $(R\check{\alpha}) \circ (\widehat{\alpha}R)$ die identische Transformation $R \Rightarrow R$.*

Sind hingegen Funktoren $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \to A$ gegeben und Transformationen $\varepsilon : \mathrm{Id}_\mathcal{A} \Rightarrow RL$ und $\eta : LR \Rightarrow \mathrm{Id}_\mathcal{B}$ mit der Eigenschaft $(R\eta) \circ (\varepsilon R) = \mathrm{id}_R$ und $(\eta L) \circ (L\varepsilon) = \mathrm{id}_L$, so gibt es genau eine Adjunktion α von Funktoren (L,R) mit $\widehat{\alpha} = \varepsilon$ und $\check{\alpha} = \eta$.

Lemma 11. *Gegeben eine Adjunktion α von Funktoren (L,R) mit $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, so gilt:*

1. *Die Einheit $\widehat{\alpha} : \mathrm{Id}_\mathcal{A} \Rightarrow RL$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn L volltreu ist.*
2. *Die Koeinheit $\check{\alpha} : LR \Rightarrow \mathrm{Id}_\mathcal{B}$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn R volltreu ist.*
3. *$\widehat{\alpha}$ und $\check{\alpha}$ sind genau dann beide Isomorphismen, wenn L und R Äquivalenzen von Kategorien sind. Man nennt L und R dann zueinander **quasiinvers**.*

Beweis.

1. Für $A, A' \in \mathcal{A}$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(A,A') \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}(LA,LA') \arrow[d] \\
\mathcal{A}(A,RLA') \arrow[r, equal] & \mathcal{A}(A,RLA')
\end{tikzcd}$$

   wobei die obere Horizontale von L herkommt, die linke Vertikale die Verknüpfung mit $\widehat{\alpha}_{A'}$ und die rechte Vertikale die Adjunktion α ist.

2. Analog.
3. Wenn für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt $LRB \xrightarrow{\sim} B$, dann ist auch jedes $B \in \mathcal{B}$ von der Gestalt LA für ein $A \in \mathcal{A}$.

□

Lemma 12. *Der Adjungierte einer Verknüpfung ist die Verknüpfung der Adjungierten: Sind $R : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $R' : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ Funktoren und (L,R), (L',R') adjungierte Paare, so ist auch $(L \circ L', R' \circ R)$ eine Adjunktion.*

2.2 Triangulierte Kategorien

Definition 8. Eine Kategorie $\mathcal{A}$ mit einem Automorphismus (**Verschiebefunktor**) $[1] : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ heiße **$\mathbb{Z}$-Kategorie**.

Ein Paar (F, u), bestehend aus einem Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von $\mathbb{Z}$-Kategorien und einer Isotransformation $u : [1] \circ F \xrightarrow{\sim} F \circ [1]$ heiße **$\mathbb{Z}$-Funktor**, die Transformation u heiße **$\mathbb{Z}$-Struktur** von (F, u).

Eine Transformation $\tau : F \to G$ von $\mathbb{Z}$-Funktoren (F, u) und (G, v) heißt **verträglich**, wenn kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
[1] \circ F \arrow[r, "u"] \arrow[d, "{[1]\circ\tau}"'] & F \circ [1] \arrow[d, "{\tau\circ[1]}"] \\
[1] \circ G \arrow[r, "v"] & G \circ [1]
\end{tikzcd}$$

Setze

$$\mathrm{Trans}^{\mathbb{Z}}(F, G) := \{\tau : F \to G \text{ verträglich}\}$$

Eine Adjunktion (L, R) von $\mathbb{Z}$-Funktoren heißt **verträglich**, wenn die Transformationen $\mathrm{id} \to RL$ und $LR \to \mathrm{id}$ verträglich sind.

Dabei hat für $\mathbb{Z}$-Funktoren (F, u) und (G, v) der Funktor FG die $\mathbb{Z}$-Struktur $\widetilde{v \circ u} : [1] \circ FG \xrightarrow{\sim} FG \circ [1]$, die die Verkettung der von u und v induzierten Abbildungen ist:

$$([1] \circ F) \circ G \xrightarrow{\sim} (F \circ [1]) \circ G \qquad \text{(via } u\text{)}$$

$$F \circ ([1] \circ G) \xrightarrow{\sim} F \circ (G \circ [1]) \qquad \text{(via } v\text{)}$$

Bemerkung 3. Gegeben ein $\mathbb{Z}$-Funktor F mit Rechtsadjungiertem G, so hat G eine $\mathbb{Z}$-Struktur, sodass (F, G) verträglich ist, d.h. $\mu : \mathrm{id} \to FG$ und $\nu : GF \to \mathrm{id}$ sind verträglich, d.h. es gibt ein $v : [1] \circ G \xrightarrow{\sim} G \circ [1]$ sodass kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
[1] \circ \mathrm{id} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "{[1]\circ\mu}"'] & \mathrm{id} \circ [1] \arrow[d, "{\mu\circ[1]}"] \\
[1] \circ FG \arrow[r, "\widetilde{u \circ v}"] & FG \circ [1]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
[1] \circ GF \arrow[r, "\widetilde{v \circ u}"] \arrow[d, "{[1]\circ\nu}"'] & GF \circ [1] \arrow[d, "{\nu\circ[1]}"] \\
[1] \circ \mathrm{id} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathrm{id} \circ [1]
\end{tikzcd}$$

analog für G Linksadjungierter.

Definition 9. Ein **Dreieck** in einer $\mathbb{Z}$-Kategorie ist ein Diagramm

$$X \xrightarrow{x} Y \xrightarrow{y} Z \xrightarrow{z} [1]X,$$

auch geschrieben

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr] & & Y \arrow[dl] \\
& Z \arrow[ul, "{[1]}"] &
\end{tikzcd}$$

und vorstellbar als eine Spirale.

Ein **Morphismus von Dreiecken** sei ein Tripel von Morphismen (f, g, h) sodass kommutiert

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] & {[1]X} \arrow[d, "f"] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & {[1]X'}
\end{tikzcd}$$

Definition 10. Eine **triangulierte Kategorie** ist eine additive $\mathbb{Z}$-Kategorie, in der eine Menge von Dreiecken **ausgezeichnet** sind, sodass folgende Axiome erfüllt sind:

1. Jedes zu einem ausgezeichneten Dreieck isomorphen ist selbst ausgezeichnet.

2. Für jedes Objekt X ist $X \xrightarrow{\mathrm{id}} X \to 0 \to [1]X$ ausgezeichnet.

3. Jeder Morphismus $X \to Y$ ist Teil eines ausgezeichneten Dreiecks $X \to Y \to Z \to [1]X$, dieses Z heiße **Abbildungskegel** über $X \to Y$.

4. $X \xrightarrow{x} Y \to Z \to [1]X$ ist ausgezeichnet genau dann wenn das "gedrehte Dreieck" $Y \to Z \to [1]X \xrightarrow{-x} [1]Y$ ausgezeichnet ist.

5. Gegeben zwei ausgezeichnete Dreiecke und ein kommutatives Quadrat (links)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] & {[1]X} \arrow[d, "{[1]f}"] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & {[1]X'}
\end{tikzcd}$$

   gibt es einen Morphismus $h : Z \to Z'$ sodass alle entstehenden Quadrate kommutieren.

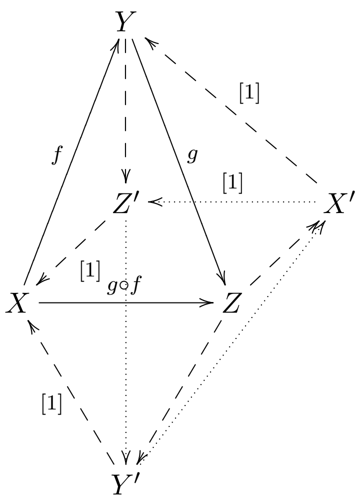
6. (**Oktaederaxiom**) Gegeben ausgezeichnete Dreiecke

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow [1]X$$

$$Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X' \longrightarrow [1]Y$$

$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \longrightarrow Y' \longrightarrow [1]X$$

   gibt es ein ausgezeichnetes Dreieck $Z' \to Y' \to X' \to [1]Z'$ sodass im Oktaeder die beiden Quadrate im Schnitt mit senkrechten Ebenen kommutieren und alle acht Dreiecke entweder kommutieren oder ausgezeichnet sind:



Lemma 13. *Ist $\mathcal{T}$ eine triangulierte Kategorie und $X \to Y \to Z \to [1]X$ ausgezeichnet, so bilden für jedes Objekt $W \in \mathcal{T}$ die Morphismen nach W eine l.e.S. abelscher Gruppen, die* ***lange exate Hom-Sequenz***

$$\cdots \leftarrow \mathcal{T}(X, W) \leftarrow \mathcal{T}(Y, W) \leftarrow \mathcal{T}(Z, W) \leftarrow \mathcal{T}([1]X, W) \leftarrow \cdots$$

und dual für die Morphismen von W

$$\cdots \to \mathcal{T}(W, X) \to \mathcal{T}(W, Y) \to \mathcal{T}(W, Z) \to \mathcal{T}(W, [1]X) \to \cdots$$

Definition 11. Ein additiver $\mathbb{Z}$-Funktor zwischen triangulierten Kategorien heißt **triangulierter Funktor**, wenn er ausgezeichnete Dreiecke zu ausgezeichneten Dreiecken macht.

2.3 Kettenkomplexe und ihre Homotopiekategorie

Definition 12. Zu einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ definiere $\mathsf{Ket}_\mathcal{A} := \mathsf{Ket}(\mathcal{A})$ als die **Kategorie der Kettenkomplexe** in $\mathcal{A}$, das sind Objekte $(X^\bullet, d^\bullet) = ((X^i)_{i\in\mathbb{Z}}, (d^i)_{i\in\mathbb{Z}})$ mit $X^i \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und $d^i \in \mathcal{A}(X^i, X^{i+1})$ sodass $d^{i+1} \circ d^i = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Die Morphismen sind **Kettenabbildung**, d.h. $f \in \mathsf{Ket}_\mathcal{A}(C^\bullet, D^\bullet)$ besteht aus $(f^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ mit $f^i \in \mathcal{A}(C^i, D^i)$ sodass $d^i \circ f^i = f^{i+1} \circ d^i$.

Die Automorphismen $[k] : \mathsf{Ket}_\mathcal{A} \to \mathsf{Ket}_\mathcal{A}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$, die $(C^\bullet, d^\bullet)$ auf einen Komplex $([k]C^\bullet, [k]d^\bullet)$ mit $[k]C^i := C^{i+k}$ und $[k]d^i := (-1)^k d^{i+k}$ abbilden, heißen **Verschiebefunktoren**.

Definiere $\mathsf{Ket}^+_\mathcal{A}$ als die Unterkategorie der in Richtung der Pfeile beschränkten Komplexe, entsprechend $\mathsf{Ket}^-_\mathcal{A}$ als die Unterkategorie der gegen Richtung der Pfeile beschränkten Komplexe und schließlich $\mathsf{Ket}^b_\mathcal{A}$ als die Unterkategorie der in beide Richtungen beschränkten Komplexe in $\mathcal{A}$.

Definition 13. Die **Homologie eines Komplexes** $(C^\bullet, d^\bullet) \in \mathsf{Ket}_\mathcal{A}$ ist definiert als Komplex $\mathcal{H}(C^\bullet)$ mit $\mathcal{H}^i(C^\bullet) := \operatorname{Im}(d^{i-1})/\operatorname{Ker}(d^i)$ und trivialem Differential. $\mathcal{H}$ ist ein Funktor, denn Kettenabbildungen induzieren Abbildungen auf der Homologie. Wir nennen Kettenabbildungen, die auf der Homologie Isomorphismen induzieren **Quasiisomorphismen**. Komplexe ohne Homologie heißen **exakt**.

Definition 14. Ein Morphismus $f \in \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}(C^\bullet, D^\bullet)$ heißt **nullhomotop**, falls es einen Morphismus $s : \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}(C^\bullet, [-1]D^\bullet)$ gibt sodass $\forall i \in \mathbb{Z} : f^i = d^{i-1} \circ s^i + s^{i+1} \circ d^i$. Der Nullmorphismus ist trivial nullhomotop.

Zwei Morphismen $f, g \in \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}(C^\bullet, D^\bullet)$ heißen **homotop**, falls $f - g$ nullhomotop ist. Homotopie von Kettenabbildungen ist eine Äquivalenzrelation, den Quotientenraum nennen wir $\mathsf{Hot}_{\mathcal{A}}(C^\bullet, D^\bullet) := \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}(C^\bullet, D^\bullet)/_\sim$, wobei $\sim$ Kettenhomotopie bezeichne. Als Objekte der neuen Kategorie $\mathsf{Hot}_{\mathcal{A}}$ nehmen wir nun $(C^\bullet, [d^\bullet]_\sim)$, wobei $(C^\bullet, d^\bullet) \in \operatorname{Ob} \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}$ sei.

Die Verschiebefunktoren $[k]$ aus $\mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}$ liefern Automorphismen von Hot.

Analog bilden wir diesen Quotienten für $\mathsf{Ket}^+_{\mathcal{A}}$, $\mathsf{Ket}^-_{\mathcal{A}}$, $\mathsf{Ket}^b_{\mathcal{A}}$ und bezeichnen die Resultate mit $\mathsf{Hot}^+_{\mathcal{A}}$, $\mathsf{Hot}^-_{\mathcal{A}}$, $\mathsf{Hot}^b_{\mathcal{A}}$.

2.4 Hauptlemma der homologischen Algebra

Definition 15. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein Objekt $I \in \mathcal{C}$ heißt **injektives Objekt**, falls für jeden Monomorphismus $X \hookrightarrow Y$ in $\mathcal{C}$ der durch den kovarianten Hom-Funktor induzierte Morphismus $\mathcal{C}(X, I) \to \mathcal{C}(Y, I)$ surjektiv ist, wenn sich also jeder Morphismus $Y \to I$ entlang $X \hookrightarrow Y$ zurückziehen lässt auf einen Morphismus $X \to I$.

Satz 4 (Hauptlemma der homologischen Algebra)**.** *Sei in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ein Komplex $C \in \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{H}^q C = 0$ für $q > 0$ und ein Komplex $I \in \mathsf{Ket}^+_{i\mathcal{A}}$ injektiver Objekte mit $I^q = 0$ für $q < 0$ gegeben. Dann induziert die nullte Homologie eine Bijektion*

$$\mathsf{Hot}_{\mathcal{A}}(C, I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(\mathcal{H}^0 C, \mathcal{H}^0 I)$$

2.5 Die Homotopiekategorie ist trianguliert

Definition 16. Für eine Kettenabbildung $f \in \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}(C^\bullet, D^\bullet)$ definiere den **Abbildungskegel** als den Komplex $K(f) \in \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}$ mit $K(f)^\bullet := [1]C^\bullet \oplus D^\bullet$, d.h. $K(f)^i = C^{i+1} \oplus D^i$ und $d^\bullet := \begin{pmatrix} [1]d^\bullet & 0 \\ f^\bullet & d^\bullet \end{pmatrix}$, d.h. $d^i = \begin{pmatrix} -d^{i+1} & 0 \\ f^i & d^i \end{pmatrix}$.

Satz 5. *Die Homotopiekategorie einer abelschen Kategorie ist mit dem Verschiebefunktor* $[1]$ *trianguliert, wenn wir alle Dreiecke auszeichnen, die zu einem Dreieck der folgenden Form isomorph sind:*

$$X \xrightarrow{f} Y \to K(f) \to [1]X \tag{$*$}$$

Beweis. (Idee)

1. Jedes zu einem ausgezeichneten Dreieck isomorphen ist per definitionem selbst ausgezeichnet.

2. Für jedes Objekt X ist $X \xrightarrow{\mathrm{id}} X \to 0 \to [1]X$ ausgezeichnet, weil $\mathrm{id}_{K(f)}$ nullhomotop ist via $s := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, denn

$$\mathrm{id}_{K(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d^i & 0 \\ 1 & d^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^{i+1} & 0 \\ 1 & d^i \end{pmatrix} = d^{i-1} \circ s^i + s^{i+1} \circ d^i$$

3. Jeder Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ ist Teil eines ausgezeichneten Dreiecks $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to [1]X$ per definitionem mit $Z := K(f)$.

4. $X \xrightarrow{x} Y \to Z \to [1]X$ ist ausgezeichnet genau dann wenn das “gedrehte Dreieck” $Y \to Z \to [1]X \xrightarrow{-x} [1]Y$ ausgezeichnet ist:

   Ohne Einschränkungen ist $Z = K(x)$. Wir konstruieren eine Homotopieäquivalenz $[1]X \to K(\alpha)$, wobei α die Inklusion $Y \to K(x)$ sein soll. Es ist $K(\alpha)^n = Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n$, das Differential lässt sich als 3×3-Matrix auffassen. Die Abbildung $\varphi : [1]X \to K(\alpha)$ sei gegeben durch $\varphi^n := (0, \mathrm{id}_{X^{n+1}}, 0)$, die Abbildung $\psi : K(\alpha) \to [1]X$ sei gegeben durch $\psi^n := (-f^{n+1}, \mathrm{id}_{X^{n+1}}, 0)^t$. Dann gilt $\psi^n \circ \varphi^n = \mathrm{id}_{X^{n+1}}$, anders gesprochen $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{[1]X}$. Die Abbildung $s : [1]K(\alpha) \to K(\alpha)$, die gegeben ist durch die 3×3-Matrix mit id_{Y^n} in der rechten oberen Ecke und sonst nur 0 ist dann eine Kettenhomotopie von $\varphi \circ \psi$ zur Identität.

5. Gegeben zwei ausgezeichnete Dreiecke und ein kommutatives Quadrat (links)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] & {[1]X} \arrow[d, "{[1]f}"] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & {[1]X'}
\end{tikzcd}$$

   gibt es einen Morphismus $h : Z \to Z'$ sodass alle entstehenden Quadrate kommutieren.

6. (**Oktaederaxiom**) Zum Beweis des Oktaederaxioms siehe Topologie-Skript, das ist auch nur Matrizenmultiplikation.

□

3 Anhang II - Weiterführendes

3.1 Mehr über Lokalisierungen

Lemma 14. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit voller Unterkategorie $\mathcal{C}'$ und S ein multiplikatives System in $\mathcal{C}$, dessen Teil, der in $\mathcal{C}'$ liegt, wir naturgemäß mit S' bezeichnen. Wenn nun S' ein multiplikatives System in $\mathcal{C}'$ ist und gilt:* **[K-S] 1.6.5**

- *Für $f : X \to Y$ in S mit $Y \in \mathcal{C}'$ existiert $g : W \to X$ mit $W \in \mathcal{C}'$ und $f \circ g \in S$,*
- *oder diese Bedingung mit umgedrehten Pfeilen,*

so ist $(\mathcal{C}')_{S'}$ eine volle Unterkategorie von $\mathcal{C}_S$.

Lemma 15. *Sei $\mathcal{C}$ eine kleine triangulierte Kategorie, $\mathcal{N}$ ein trianguliertes System in $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ eine volle triangulierte Unterkategorie von $\mathcal{C}$ sodass jedes ausgezeichnete Dreieck $X \to Y \to Z \to$ in $\mathcal{C}$ mit $X, Y \in \mathcal{C}'$ auch ausgezeichnet in $\mathcal{C}'$ ist. Sei $\mathcal{N}' := \mathcal{N} \cap \mathcal{C}'$. Dann gelten:* **[K-S] 1.6.10.**

1. *$\mathcal{N}$' ist ein trianguliertes System in $\mathcal{C}$.*
2. *Wenn jeder Morphismus $Y \to Z$ in $\mathcal{C}$ mit $Y \in \mathcal{C}'$ und $Z \in \mathcal{N}$ über ein Objekt aus $\mathcal{N}'$ faktorisiert, so ist $\mathcal{C}'/\mathcal{N}'$ eine volle Unterkategorie von $\mathcal{C}/\mathcal{N}$.*

Lemma 16.

1. *Jeder Rechts- und jeder Linksadjungierte eines Lokalisierungsfunktors ist volltreu.*

2. *Besitzt ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, der genau die Morphismen aus S zu Isomorphismen macht, einen volltreuen Rechts- oder Linksadjungierten, so ist er ein Lokalisierungsfunktor.*

Beweis.

1. Wir behandeln den Fall eines Linksadjungierten $L : \mathcal{C}_S \to \mathcal{C}$.

   Ein Funktor L einer Adjunktion (L, R) ist genau dann volltreu, wenn die Einheit der Adjunktion $\widehat{\alpha} : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_S} \Rightarrow R \circ L$ ein Isomorphismus ist (siehe Anhang I, Lemma 11).

   can induziert für alle $A \in \mathcal{C}_S$ und $B \in \mathcal{C}$ Isomorphismen $\mathcal{C}(LA, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(\mathrm{can}(LA), \mathrm{can}(B))$. Da $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_S = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ist $\widehat{\alpha}$ für alle $A \in \mathcal{C}_S$ ein Isomorphismus $A \xrightarrow{\sim} LA$ in $\mathcal{C}_S$. Also ist L volltreu.

2. Wir behandeln den Fall eines volltreuen Rechtsadjungierten $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ zu einem Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Definiere eine Kategorie $\widehat{\mathcal{C}}$ durch $\mathrm{Ob}\,\widehat{\mathcal{C}} := \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und $\widehat{C}(X, Y) := \mathcal{D}(FX, FY)$, so ist der Funktor $\widehat{F} : \widehat{C} \to \mathcal{D}$ eine Äquivalenz $\widehat{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$, da ja gilt $FRD \xrightarrow{\sim} D$ für alle $D \in \mathcal{D}$. Wenden wir diesen Isomorphismus an auf FX für $X \in \mathcal{C}$, so folgt, dass die Sequenz $FX \to FRFX \to FX$, die man mit der Adjunktion erhält, aus Isomorphismen besteht. Sei nun $G : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ein Funktor, der Morphismen aus S zu Isomorphismen macht. Dann faktorisiert G über $\mathcal{C} \to \widehat{C}$ in einen Funktor $\widetilde{G} : \widehat{C} \to \mathcal{E}$, indem wir auf Morphismen $\widetilde{G} : \widehat{C}(X, Y) \to \mathcal{E}(GX, GY)$ für $\widehat{f} \in \widehat{C}(X, Y)$ erklären durch die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} GX \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & GY \arrow[d, "\wr"] \\ GRFX \arrow[r, "GR\widehat{f}"] & GRFY \end{tikzcd}$$

   und diese Faktorisierung ist die einzig mögliche.

□

3.2 Abschneidefunktoren

Definition 17. Gegeben $(X^\bullet, d^\bullet) \in \mathsf{Ket}(\mathcal{A})$ definiere für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$\tau^{\leq n} X := \quad \cdots \to X^{n-1} \to \operatorname{Ker} d^{n-1} \to 0$$

$$\tau^{\geq n} X := \quad 0 \to \operatorname{Coker} d^n \to X^{n+1} \to \cdots$$

das liefert Funktoren $\tau^{\leq n} : \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}} \to \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}^-$ und $\tau^{\geq n} : \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}} \to \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}^+$, genannt **Abschneidefunktoren**.

Lemma 17. *1. $\tau^{\leq n}$ induziert für $i \leq n$ Isomorphismen auf der i-ten Kohomologie.*

2. *$\tau^{\geq n}$ induziert für $i \geq n$ Isomorphismen auf der i-ten Kohomologie.*

3. *$\tau^{\leq n}$ und $\tau^{\geq n}$ erhalten homotope Abbildungen und induzieren daher Abschneidefunktoren $\tau^{\leq n} : \mathsf{Hot}_{\mathcal{A}} \to \mathsf{Hot}_{\mathcal{A}}^-$ und $\tau^{\geq n} : \mathsf{Hot}_{\mathcal{A}} \to \mathsf{Hot}_{\mathcal{A}}^+$.*

4. *$\tau^{\leq n}$ und $\tau^{\geq n}$ erhalten Quasiisomorphismen und induzieren daher Abschneidefunktoren $\tau^{\leq n} : \mathsf{Der}_{\mathcal{A}} \to \mathsf{Der}_{\mathcal{A}}^-$ und $\tau^{\geq n} : \mathsf{Der}_{\mathcal{A}} \to \mathsf{Der}_{\mathcal{A}}^+$.*

5. *Für $\mathcal{A}$ klein haben wir volltreue Einbettungen*

$$\begin{tikzcd} & & \mathsf{Der}^+_{\mathcal{A}} \arrow[dr, hook] & \\ \mathcal{A} \arrow[r, hook] & \mathsf{Der}^b_{\mathcal{A}} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathsf{Der}_{\mathcal{A}} \\ & & \mathsf{Der}^-_{\mathcal{A}} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Der Funktor $\mathcal{A} \to \mathsf{Der}^b_{\mathcal{A}}$ ist das Auffassen eines Objekts von $\mathcal{A}$ als im Grad 0 *konzentrierter Komplex, verknüpft mit den kanonischen Funktoren $\mathcal{A} \to \mathsf{Hot}_{\mathcal{A}} \to \mathsf{Der}_{\mathcal{A}}$, wobei das Bild dieser Verknüpfung natürlich in $\mathsf{Der}^b_{\mathcal{A}}$ landet. Die Funktoren $\mathsf{Der}^b \to \mathsf{Der}^+$ und $\mathsf{Der}^b \to \mathsf{Der}^-$ sowie $\mathsf{Der}^+ \to \mathsf{Der}$ und $\mathsf{Der}^- \to \mathsf{Der}$ sind die Einbettungen der Unterkategorien.*

Beweis. $\mathsf{Der}^-_{\mathcal{A}} \to \mathsf{Der}_{\mathcal{A}}$ ist volltreu, denn er wird von der volltreuen Einbettung $\mathsf{Ket}^-_{\mathcal{A}} \to \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}$ induziert. Die anderen Einbettungen sind ähnlich zu behandeln, bis auf $\mathcal{A} \to \mathsf{Der}^b_{\mathcal{A}}$, dieser ist volltreu, weil für einen im Grad 0 konzentrierten Komplex jede Homotopieäquivalenz und jeder Quasiisomorphismus bereits ein Isomorphismus ist. □

3.3 Abstrakte Interpretation des Kohomologierings

Definition 18. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven und $M, N \in \mathcal{A}$. Die Rechtsderivierten des kontravarianten Hom-Funktors $F := \mathcal{A}(M, -) : \mathcal{A} \to \mathsf{Ab}^\circ$ nennen wir

$$\mathcal{A}^{[i]}(M, -) := \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, -) := R^i F(-)$$

und es ist $\mathcal{A}^{[0]}(M, -) = R^0 F(-) = F(-) = \mathcal{A}(M, -)$.

$\mathcal{A}^{[1]}(M, N)$ lässt sich interpretieren als Menge der Isomorphieklassen von kurzen exakten Sequenzen $N \hookrightarrow E \twoheadrightarrow M$ in $\mathcal{A}$ ("M wird durch N zu E erweitert").

Definition 19. Definiere für $M, N, L \in \mathcal{A}$ die **Yoneda-Produkte**

$$\mathcal{A}^{[i]}(M, N) \times \mathcal{A}^{[j]}(N, L) \to \mathcal{A}^{[i+j]}(M, L)$$

über die gestrichelt eingezeichnete Verknüpfung im Diagramm, in dem der untere horizontale Pfeil die Verknüpfung von Morphismen sein soll und $M \hookrightarrow I^*,\ N \hookrightarrow J^*,\ L \hookrightarrow K^*$ injektive Auflösungen sind:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^{[i]}(M, N) \times \mathcal{A}^{[j]}(N, L) \arrow[d, "\wr"] \arrow[r, dashed] & \mathcal{A}^{[i+j]}(M, L) \\ \mathsf{Hot}_{\mathcal{A}}(I^*, [i]J^*) \times \mathsf{Hot}_{\mathcal{A}}(J^*, [j]K^*) \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{A}^{[i+j]}(I^*, [i+j]J^*) \arrow[u, "\wr"'] \\ \mathsf{Hot}_{\mathcal{A}}(I^*, [i]J^*) \times \mathsf{Hot}_{\mathcal{A}}([i]J^*, [i+j]K^*) \arrow[r] & \mathcal{A}^{[i+j]}(I^*, [i+j]J^*) \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd}$$

So erhalten wir für jedes Objekt $M \in \mathcal{A}$ den graduierten **Ring der Selbsterweiterungen**

$$\mathcal{A}^{[*]}(M) := \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{A}^{[i]}(M, M).$$

Satz 6. *Ist X ein topologischer Raum, so haben wir*

$$\forall \mathcal{F} \in \mathsf{Ab}_{/X} : \Gamma\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F}).$$

Da es von jeder abelschen Garbe einen Monomorphismus in eine welke injektive abelsche Garbe gibt, ergeben sich kanonische Isomorphismen

$$H^i(X;\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Ab}_{/X}^{[i]}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F})$$

und somit trägt $H^*(X;\mathbb{Z}_X) \simeq \mathsf{Ab}_{/X}^{[*]}(\mathbb{Z}_X)$ eine graduierte Ringstruktur, genannt ***garbentheoretischer Kohomologiering*** *von X.*

Ist X parakompakt und lokal kontrahierbar, so ist die Identifikation

$$H^*_{\text{sing}}X \xrightarrow{\sim} H^*(X;\mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Ab}_{/X}^{[*]}(\mathbb{Z}_X)$$

ein Ringisomorphismus, d.h. das $\cup$-Produkt entspricht den Selbsterweiterungen.

Beweis steht im Topologie-Skript, III.3.4.11.

Index