Derivierte Kategorien, Lokalisierung in Kategorien, triangulierte Struktur, Quotienten von triangulierten Kategorien

Konrad Völkel, AG Garbenkohomologie
bei Prof. Soergel im Wintersemester 08/09
an der Uni Freiburg

26. Januar 2009

Inhaltsverzeichnis

Überblick : Wir wollten von einer abelschen Garbe auf einem topologischen Raum X, z.B. $\mathbb{Z}_X \in \mathsf{Ab}_{/X}$ die Garbenkohomologie berechnen, d.h. die rechtsderivierten Funktoren des Funktors der globalen Schnitte, d.h. die Homologie einer azyklischen Auflösung von $\mathbb{Z}_X$. Nun wollen wir aus dem ursprünglichen Funktor Γ einen exakten Funktor machen, den Rechtsderivierten schlechthin, $\mathbf{R}\Gamma$, der ausgezeichnete Dreiecke in ausgezeichnete Dreiecke überführt. Dazu bilden wir die derivierte Kategorie zu einer abelschen Kategorie und finden darin einige bekannte Gesichter wieder, z.B. Ext^i. Die alten rechtsderivierten $R^i\Gamma$ bekommen wir über die Homologie als $\mathcal{H}^i\mathbf{R}\Gamma \simeq R^i\Gamma$.

Wir nehmen eine abelsche Kategorie	$\mathcal{A}$
bilden die Kettenkomplexe darin	$\rightsquigarrow \mathsf{Ket}(\mathcal{A})$
modulo nullhomotope Morphismen	$\rightsquigarrow \mathsf{Hot}(\mathcal{A})$
und lokalisieren an Quasiisos	$\rightsquigarrow \mathsf{Der}(\mathcal{A})$

Wir wollen sehen, wie man Kategorien lokalisiert, wie die derivierte Kategorie $\mathsf{Der}(\mathcal{A})$ definiert ist und dass $\mathsf{Der}(\mathcal{A})$ eine triangulierte Kategorie ist.

1 Derivierte Kategorien

Sei in diesem Vortrag $\mathcal{A}$ stets eine kleine abelsche Kategorie.

1.1 Lokalisierung von Kategorien (unter Ore-Bedingungen)

Wir fordern von einer Lokalisierung von Kategorien analoge Eigenschaften wie von der Lokalisierung von Ringen. Dadurch ist diese eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus:

Definition 1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S eine Klasse von Morphismen in $\mathcal{C}$. Eine **Lokalisierung** von $\mathcal{C}$ an S ist ein Paar $(\mathcal{C}_S, \mathrm{can})$ mit $\mathcal{C}_S$ einer Kategorie und $\mathrm{can} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ ein Funktor sodass

1. Jeder Morphismus aus S wird unter can ein Isomorphismus.
2. Ist $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor, der alle Morphismen aus S zu Isomorphismen macht, so faktorisiert F eindeutig über can, d.h. es gibt genau ein $\widetilde{F} : \mathcal{C}_S \to \mathcal{D}$ sodass $F = \widetilde{F} \circ \mathrm{can}$.

Ein Funktor $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ mit der Eigenschaft, dass für die Menge S der Morphismen, die G zu Isomorphismen macht, eine Lokalisierung $\mathcal{C}_S$ existiert und dass der induzierte Funktor $\widetilde{G} : \mathcal{C}_S \to \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien ist, heißt **Lokalisierungsfunktor**.

Definition 2. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S eine Menge von Morphismen in $\mathcal{C}$. S heißt (rechts)**multiplikatives System** in $\mathcal{C}$, wenn [K-S] 1.6.1.

(S1) S enthält alle Identitäten.

(S2) S ist abgeschlossen unter Komposition.

(S3) Jedes Diagramm in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

mit $s \in S$ kann vervollständigt werden durch einen Morphismus $t \in S$ zu

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d, "t"] & Z \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

(S4) Für $f, g : X \to Y$ gilt

$$\begin{aligned} & \exists s : X' \to X,\ s \in S : f \circ s = g \circ s \\ \Longrightarrow\ & \exists t : Y \to Y',\ t \in S : t \circ f = t \circ g. \end{aligned}$$

Die Bedingungen (S3) und (S4) entsprechen den **Ore-Bedingungen** bei der Lokalisierung nichtkommutativer Ringe.

Satz 1. *Ist $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie und S ein rechtsmultiplikatives System in $\mathcal{C}$, so existiert eine Lokalisierung* $\mathrm{can} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$*.*

Beweis. Sei $\mathcal{C}_S$ definiert durch

a) $\operatorname{Ob}\mathcal{C}_S := \operatorname{Ob}\mathcal{C}$

b) $\mathcal{C}_S(X,Y) := \{(s, X', f) \,:\, X' \in \mathcal{C},\ s \in \mathcal{C}(X', X),\ f \in \mathcal{C}(X', Y),\ s \in S\}/_\sim$ mit der Äquivalenzrelation $(s, X', f) \sim (t, X'', g) :\Leftrightarrow$ es existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
X' \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "f"'] & X''' \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, "u"'] & X'' \arrow[ul, "t"'] \arrow[dl, "g"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

mit $u \in S$. Das heißt "kürzen". Hierbei ist $\mathcal{C}_S(X,Y)$ wieder eine Menge, weil $\mathcal{C}(X,Y)$ und S Mengen sind.

c) Die Komposition von zwei Morphismen $(s, X', f) \in \mathcal{C}_S(X,Y)$ und $(t, Y', g) \in \mathcal{C}_S(Y,Z)$ ist definiert über

$$(t, Y', g) \circ (s, X', f) := (s \circ t', X'', g \circ h)$$

wobei $(t', X'', h) \in \mathcal{C}_S(X', Y')$ gefunden werden kann durch Anwendung von (S3) auf das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & X'' \arrow[dl, dashed, "t'"'] \arrow[dr, dashed, "h"] & & \\
 & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

Das ist eine Kategorie, denn zu $X \in \mathcal{C}_S$ ist $(\mathrm{id}_X, X, \mathrm{id}_X)$ das neutrale Element der Komposition in $\mathcal{C}_S$ und diese Komposition ist assoziativ.

d) Definiere einen Funktor $\mathrm{can} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ durch $\mathrm{can}(X) := X$ auf Objekten und für $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ setze $\mathrm{can}(f) := (\mathrm{id}_X, X, f)$.

e) Nun ist zu prüfen, dass can alle Morphismen aus S zu Isomorphismen macht. Sei also $f : X \to Y$ in S, dann ist $\mathrm{can}(f) = (\mathrm{id}_X, X, f)$. In $\mathcal{C}_S$ gibt es auch den Morphismus (f, X, id_X). Die Komposition liefert $(\mathrm{id}_X, X, \mathrm{id}_X)$, denn es kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dl, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"] & & \\
 & X \arrow[dl, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "f"] & & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"] & \\
X & & Y & & X
\end{tikzcd}$$

Die andere Komposition liefert entsprechend (f, X, f), das ist aber äquivalent zu $(\mathrm{id}_Y, Y, \mathrm{id}_Y)$, weil dieses Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
 & Y & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[l, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[ul, "\mathrm{id}_Y"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_Y"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

f) Jetzt wollen wir noch sehen, dass jeder weitere Funktor P, der alle Morphismen aus S zu Isomorphismen macht, eindeutig über can faktorisiert. Sei $P : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor, der alle Morphismen aus S zu Isomorphismen macht. Dann definiere $\widetilde{P} : \mathcal{C}_S \to \mathcal{D}$ durch $\widetilde{P}(X) := P(X)$ auf Objekten und für $(\mathrm{id}_X, X, f) \in \mathcal{C}_S(X, Y)$ setze $\widetilde{P}(\mathrm{id}_X, X, f) := f$. Allgemein bilden wir $(s, X', f) \in \mathcal{C}_S(X, Y)$ auf $P(f) \circ P(s)^{-1}$ ab.

$$\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
 & P(X') \arrow[dr, "P(f)"] & \\
P(X) \arrow[ur, "P(s)^{-1}"] & & P(Y)
\end{tikzcd}$$

Die Eigenschaft $P = \widetilde{P} \circ \mathrm{can}$ ist jetzt offensichtlich. Die Universalität von $\widetilde{P}$ sehen wir, indem wir ein $\widetilde{P}'$ annehmen und eindeutige Isotransformationen $\widetilde{P} \implies \widetilde{P}'$ finden.

$\square$

Lemma 1. *Es gelten in der Situation vom Satz 1:*

1. *Gegeben Funktoren $F, G : \mathcal{C}_S \to \mathcal{D}$ in eine weitere Kategorie $\mathcal{D}$, so induziert die Abbildung $\mathsf{Cat}(\mathcal{C}_S, \mathcal{D}) \xrightarrow{\mathrm{can}_*} \mathsf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ eine Bijektion*

$$\mathsf{Fun}_{\mathcal{C}_S, \mathcal{D}}(F, G) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Fun}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(F \circ \mathrm{can}, G \circ \mathrm{can})$$

2. *Ist $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt sodass $\mathcal{C}(A, -) : \mathcal{C} \to \mathsf{Ens}$ alle Morphismen aus S zu Isomorphismen macht, so liefert can für alle $B \in \mathcal{C}$ Bijektionen*

$$\mathcal{C}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(A, B)$$

Beweis.

1. Jeder Funktor $F : \mathcal{C}_S \to \mathcal{D}$ hat die Eigenschaft, dass $F(s, X', f) = ((F \circ \mathrm{can})(s))^{-1} \circ (F \circ \mathrm{can})(f)$, denn der Funktor $(F \circ \mathrm{can})$ induziert eindeutig F. Daher ist jede Transformation $\tau : (F \circ \mathrm{can}) \implies (G \circ \mathrm{can})$ auch schon eine Transformation $\tau : F \implies G$. Die Umkehrung ist klar.

2. Ist $F := \mathcal{C}(A, -) : \mathcal{C} \to \mathsf{Ens}$ ein Funktor, der alle Morphismen aus S zu Isomorphismen macht, so faktorisiert er über den Lokalisierungsfunktor sodass $\mathcal{C}(A, B) = F(B) = \widetilde{F}(\mathrm{can}(B)) = \widetilde{F}(B)$. Da $G := \mathcal{C}_S(A, -)$ ein Funktor ist, sodass $F = G \circ \mathrm{can}$, ist wegen Eindeutigkeit schon $\widetilde{F} \xrightarrow{\sim} G$ und somit $\mathcal{C}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(A, B)$.

$\square$

Korollar 1. *Lokalisieren vertauscht mit Dualisieren, d.h. $(\mathcal{C}^\circ)_S \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}_S)^\circ$. Daher kann man genau so gut Linksbrüche statt Rechtsbrüchen verwenden.*

Lemma. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit voller Unterkategorie $\mathcal{C}'$ und S ein multiplikatives System in $\mathcal{C}$, dessen Teil, der in $\mathcal{C}'$ liegt, wir naturgemäß mit S' bezeichnen. Wenn nun S' ein multiplikatives System in $\mathcal{C}'$ ist und gilt:* **[K-S] 1.6.5**

- *Für $f : X \to Y$ in S mit $Y \in \mathcal{C}'$ existiert $g : W \to X$ mit $W \in \mathcal{C}'$ und $f \circ g \in S$,*
- *oder diese Bedingung mit umgedrehten Pfeilen,*

so ist $(\mathcal{C}')_{S'}$ eine volle Unterkategorie von $\mathcal{C}_S$.

Lemma 2. *Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie und S ein multiplikatives System in $\mathcal{C}$. Dann ist $\mathcal{C}_S$ via* can *additiv und* can $: \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ *ein additiver Funktor.*

Beweis. Man addiert in $\mathcal{C}_S$ Morphismen, also Brüche, indem man sie auf einen Hauptnenner bringt. Zu zwei Morphismen $(r, E, f) \in \mathcal{C}_S(X, Y)$ und $(t, F, g) \in \mathcal{C}_S(X, Z)$ finden wir mit $(S3)$ angewandt auf $E \to X \leftarrow F$ einen Morphismus (h, D, u) im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & & D \arrow[dll, "h"'] \arrow[drr, "u"] & & & \\
 & E \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "f"] & & & & F \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & X & & Z
\end{tikzcd}$$

und setzen $t \circ u = r \circ h =: s \in S$. Wir setzen $f' := f \circ h$ und $g' := g \circ u$, dann entsteht (r, E, f) aus (s, D, f') und (t, F, g) aus (s, D, g') durch kürzen. Wir definieren also im Fall $Y = Z$:

$$(r, E, f) + (t, F, g) = (s, D, f') + (s, D, g') := (s, D, f' + g').$$

$\square$

2 Anhang I - Vorraussetzungen

2.1 Adjunktionen und volltreue Funktoren

Lemma 3. *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien und $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sowie $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren.*
Jede Transformation $\alpha : \mathcal{B}(L-,-) \Rightarrow \mathcal{A}(-,R-)$ von Funktoren $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B} \to \mathsf{Ens}$ liefert eine Transformation $\widehat{\alpha} : \mathrm{Id}_\mathcal{A} \Rightarrow RL$ von Funktoren $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ durch die Vorschrift $\widehat{\alpha}_X := \alpha_{X,LX}(\mathrm{id}_{LX})$, d.h. $\widehat{\alpha}$ ist das Bild von id_{LX} unter der Abbildung $\alpha_{X,LX} : \mathcal{B}(LX, LX) \to \mathcal{A}(X, RLX)$. Jede Transformation $\tau : \mathrm{Id}_\mathcal{A} \Rightarrow RL$ liefert eine Transformation $\widetilde{\tau} : \mathcal{B}(L-,-) \Rightarrow \mathcal{A}(-,R-)$ von Funktoren $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B} \to \mathsf{Ens}$ durch die Komposition der Abbildungen

$$\widetilde{\tau}_{X,Y} : \mathcal{B}(LX,Y) \xrightarrow{R} \mathcal{A}(RLX, RY) \xrightarrow{\tau_X} \mathcal{A}(X, RY)$$

Dies liefert eine Bijektion

$$\mathrm{Trans}(\mathcal{B}(L-,-), \mathcal{A}(-,R-)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Trans}(\mathrm{Id}, RL)$$

Lemma 4. *Gegeben eine Adjunktion α von Funktoren (L, R) mit $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, erhalten wir nach dem vorigen Lemma Transformationen $\widehat{\alpha} : \mathrm{Id}_\mathcal{A} \Rightarrow RL$,genannt **Einheit**, und $\breve{\alpha} : LR \Rightarrow \mathrm{Id}_\mathcal{B}$, genannt **Koeinheit**. Dann ist die Verknüpfung $(\breve{\alpha}L)\circ(L\widehat{\alpha})$ die identische Transformation $L \Rightarrow L$ und $(R\breve{\alpha}) \circ (\widehat{\alpha}R)$ die identische Transformation $R \Rightarrow R$.*

Sind hingegen Funktoren $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \to A$ gegeben und Transformationen $\varepsilon : \mathrm{Id}_\mathcal{A} \Rightarrow RL$ und $\eta : LR \Rightarrow \mathrm{Id}_\mathcal{B}$ mit der Eigenschaft $(R\eta) \circ (\varepsilon R) = \mathrm{id}_R$ und $(\eta L) \circ (L\varepsilon) = \mathrm{id}_L$, so gibt es genau eine Adjunktion α von Funktoren (L, R) mit $\widehat{\alpha} = \varepsilon$ und $\breve{\alpha} = \eta$.

Lemma 5. *Gegeben eine Adjunktion α von Funktoren (L, R) mit $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, so gilt:*

1. *Die Einheit $\widehat{\alpha} : \mathrm{Id}_\mathcal{A} \Rightarrow RL$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn L volltreu ist.*
2. *Die Koeinheit $\breve{\alpha} : LR \Rightarrow \mathrm{Id}_\mathcal{B}$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn R volltreu ist.*
3. *$\widehat{\alpha}$ und $\breve{\alpha}$ sind genau dann beide Isomorphismen, wenn L und R Äquivalenzen von Kategorien sind. Man nennt L und R dann zueinander **quasiinvers**.*

Beweis. 1. Für $A, A' \in \mathcal{A}$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(A,A') \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}(LA, LA') \arrow[d] \\ \mathcal{A}(A, RLA') \arrow[r, equal] & \mathcal{A}(A, RLA') \end{tikzcd}$$

wobei die obere Horizontale von L herkommt, die linke Vertikale die Verknüpfung mit $\widehat{\alpha}_{A'}$ und die rechte Vertikale die Adjunktion α ist.

2. Analog.
3. Wenn für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt $LRB \xrightarrow{\sim} B$, dann ist auch jedes $B \in \mathcal{B}$ von der Gestalt LA für ein $A \in \mathcal{A}$.

□

Lemma 6. *Der Adjungierte einer Verknüpfung ist die Verknüpfung der Adjungierten: Sind $R : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $R' : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ Funktoren und (L, R), (L', R') adjungierte Paare, so ist auch $(L \circ L', R' \circ R)$ eine Adjunktion.*

2.2 Triangulierte Kategorien

Definition 3. Eine Kategorie $\mathcal{A}$ mit einem Automorphismus (**Verschiebefunktor**) $[1] : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ heiße $\mathbb{Z}$**-Kategorie**.

Ein Paar (F, u), bestehend aus einem Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von $\mathbb{Z}$-Kategorien und einer Isotransformation $u : [1] \circ F \xrightarrow{\sim} F \circ [1]$ heiße $\mathbb{Z}$**-Funktor**, die Transformation u heiße $\mathbb{Z}$**-Struktur** von (F, u).

Eine Transformation $\tau : F \to G$ von $\mathbb{Z}$-Funktoren (F, u) und (G, v) heißt **verträglich**, wenn kommutiert:

$$\begin{tikzcd} {[1] \circ F} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "{[1]\circ\tau}"'] & F \circ [1] \arrow[d, "{\tau\circ[1]}"] \\ {[1] \circ G} \arrow[r, "v"] & G \circ [1] \end{tikzcd}$$

Setze

$$\mathrm{Trans}^{\mathbb{Z}}(F, G) := \{\tau : F \to G \text{ verträglich}\}$$

Eine Adjunktion (L, R) von $\mathbb{Z}$-Funktoren heißt **verträglich**, wenn die Transformationen $\mathrm{id} \to RL$ und $LR \to \mathrm{id}$ verträglich sind.

Dabei hat für $\mathbb{Z}$-Funktoren (F, u) und (G, v) der Funktor FG die $\mathbb{Z}$-Struktur $\widetilde{v \circ u} : [1] \circ FG \xrightarrow{\sim} FG \circ [1]$, die die Verkettung der von u und v induzierten Abbildungen ist:

$$([1] \circ F) \circ G \xrightarrow{\sim} (F \circ [1]) \circ G \tag{via u}$$

$$F \circ ([1] \circ G) \xrightarrow{\sim} F \circ (G \circ [1]) \tag{via v}$$

Bemerkung 1. Gegeben ein $\mathbb{Z}$-Funktor F mit Rechtsadjungiertem G, so hat G eine $\mathbb{Z}$-Struktur, sodass (F, G) verträglich ist, d.h. $\mu : \mathrm{id} \to FG$ und $\nu : GF \to \mathrm{id}$ sind verträglich, d.h. es gibt ein $v : [1] \circ G \xrightarrow{\sim} G \circ [1]$ sodass kommutieren:

$$\begin{tikzcd} {[1] \circ \mathrm{id}} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "{[1]\circ\mu}"'] & \mathrm{id} \circ [1] \arrow[d, "{\mu\circ[1]}"] \\ {[1] \circ FG} \arrow[r, "\widetilde{u \circ v}"] & FG \circ [1] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {[1] \circ GF} \arrow[r, "\widetilde{v \circ u}"] \arrow[d, "{[1]\circ\nu}"'] & GF \circ [1] \arrow[d, "{\nu\circ[1]}"] \\ {[1] \circ \mathrm{id}} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathrm{id} \circ [1] \end{tikzcd}$$

analog für G Linksadjungierter.

Definition 4. Ein **Dreieck** in einer $\mathbb{Z}$-Kategorie ist ein Diagramm

$$X \xrightarrow{x} Y \xrightarrow{y} Z \xrightarrow{z} [1]X,$$

auch geschrieben

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] & & Y \arrow[dl] \\ & Z \arrow[ul, "{[1]}"] & \end{tikzcd}$$

und vorstellbar als eine Spirale.

Ein **Morphismus von Dreiecken** sei ein Tripel von Morphismen (f, g, h) sodass kommutiert

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] & {[1]X} \arrow[d, "f"] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & {[1]X'}
\end{tikzcd}$$

Definition 5. Eine **triangulierte Kategorie** ist eine additive $\mathbb{Z}$-Kategorie, in der eine Menge von Dreiecken **ausgezeichnet** sind, sodass folgende Axiome erfüllt sind:

1. Jedes zu einem ausgezeichneten Dreieck isomorphen ist selbst ausgezeichnet.

2. Für jedes Objekt X ist $X \xrightarrow{\mathrm{id}} X \to 0 \to [1]X$ ausgezeichnet.

3. Jeder Morphismus $X \to Y$ ist Teil eines ausgezeichneten Dreiecks $X \to Y \to Z \to [1]X$, dieses Z heiße **Abbildungskegel** über $X \to Y$.

4. $X \xrightarrow{x} Y \to Z \to [1]X$ ist ausgezeichnet genau dann wenn das "gedrehte Dreieck" $Y \to Z \to [1]X \xrightarrow{-x} [1]Y$ ausgezeichnet ist.

5. Gegeben zwei ausgezeichnete Dreiecke und ein kommutatives Quadrat (links)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] & {[1]X} \arrow[d, "{[1]f}"] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & {[1]X'}
\end{tikzcd}$$

   gibt es einen Morphismus $h : Z \to Z'$ sodass alle entstehenden Quadrate kommutieren.

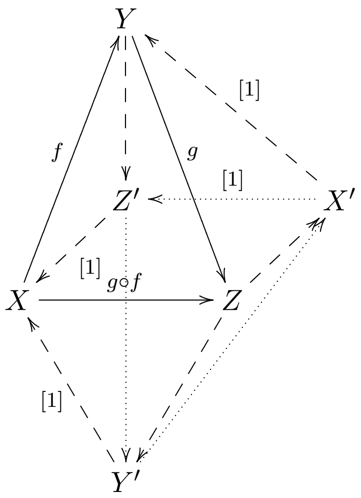
6. (**Oktaederaxiom**) Gegeben ausgezeichnete Dreiecke

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow [1]X$$

$$Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X' \longrightarrow [1]Y$$

$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \longrightarrow Y' \longrightarrow [1]X$$

   gibt es ein ausgezeichnetes Dreieck $Z' \to Y' \to X' \to [1]Z'$ sodass im Oktaeder die beiden Quadrate im Schnitt mit senkrechten Ebenen kommutieren und alle acht Dreiecke entweder kommutieren oder ausgezeichnet sind:



Lemma 7. *Ist $\mathcal{T}$ eine triangulierte Kategorie und $X \to Y \to Z \to [1]X$ ausgezeichnet, so bilden für jedes Objekt $W \in \mathcal{T}$ die Morphismen nach W eine l.e.S. abelscher Gruppen, die* ***lange exate Hom-Sequenz***

$$\cdots \leftarrow \mathcal{T}(X,W) \leftarrow \mathcal{T}(Y,W) \leftarrow \mathcal{T}(Z,W) \leftarrow \mathcal{T}([1]X,W) \leftarrow \cdots$$

und dual für die Morphismen von W

$$\cdots \to \mathcal{T}(W,X) \to \mathcal{T}(W,Y) \to \mathcal{T}(W,Z) \to \mathcal{T}(W,[1]X) \to \cdots$$

Definition 6. Ein additiver $\mathbb{Z}$-Funktor zwischen triangulierten Kategorien heißt **triangulierter Funktor**, wenn er ausgezeichnete Dreiecke zu ausgezeichneten Dreiecken macht.

2.3 Kettenkomplexe und ihre Homotopiekategorie

Definition 7. Zu einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ definiere $\mathsf{Ket}_{\mathcal{A}} := \mathsf{Ket}(\mathcal{A})$ als die **Kategorie der Kettenkomplexe** in $\mathcal{A}$, das sind Objekte $(X^\bullet, d^\bullet) = ((X^i)_{i\in\mathbb{Z}}, (d^i)_{i\in\mathbb{Z}})$ mit $X^i \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und $d^i \in \mathcal{A}(X^i, X^{i+1})$ sodass $d^{i+1} \circ d^i = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Die Morphismen sind **Kettenabbildung**, d.h. $f \in \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}(C^\bullet, D^\bullet)$ besteht aus $(f^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ mit $f^i \in \mathcal{A}(C^i, D^i)$ sodass $d^i \circ f^i = f^{i+1} \circ d^i$.

Die Automorphismen $[k] : \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}} \to \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$, die $(C^\bullet, d^\bullet)$ auf einen Komplex $([k]C^\bullet, [k]d^\bullet)$ mit $[k]C^i := C^{i+k}$ und $[k]d^i := (-1)^k d^{i+k}$ abbilden, heißen **Verschiebefunktoren**.

Definiere $\mathsf{Ket}^+_{\mathcal{A}}$ als die Unterkategorie der in Richtung der Pfeile beschränkten Komplexe, entsprechend $\mathsf{Ket}^-_{\mathcal{A}}$ als die Unterkategorie der gegen Richtung der Pfeile beschränkten Komplexe und schließlich $\mathsf{Ket}^b_{\mathcal{A}}$ als die Unterkategorie der in beide Richtungen beschränkten Komplexe in $\mathcal{A}$.

Definition 8. Die **Homologie eines Komplexes** $(C^\bullet, d^\bullet) \in \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}$ ist definiert als Komplex $\mathcal{H}(C^\bullet)$ mit $\mathcal{H}^i(C^\bullet) := \operatorname{Im}(d^{i-1}) / \operatorname{Ker}(d^i)$ und trivialem Differential. $\mathcal{H}$ ist ein Funktor, denn Kettenabbildungen induzieren Abbildungen auf der Homologie. Wir nennen Kettenabbildungen, die auf der Homologie Isomorphismen induzieren **Quasiisomorphismen**. Komplexe ohne Homologie heißen **exakt**.

Definition 9. Ein Morphismus $f \in \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}(C^\bullet, D^\bullet)$ heißt **nullhomotop**, falls es einen Morphismus $s : \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}(C^\bullet, [-1]D^\bullet)$ gibt sodass $\forall i \in \mathbb{Z} : f^i = d^{i-1} \circ s^i + s^{i+1} \circ d^i$. Der Nullmorphismus ist trivial nullhomotop.

Zwei Morphismen $f, g \in \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}(C^\bullet, D^\bullet)$ heißen **homotop**, falls $f - g$ nullhomotop ist. Homotopie von Kettenabbildungen ist eine Äquivalenzrelation, den Quotientenraum nennen wir $\mathsf{Hot}_{\mathcal{A}}(C^\bullet, D^\bullet) := \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}(C^\bullet, D^\bullet)/_\sim$, wobei $\sim$ Kettenhomotopie bezeichne. Als Objekte der neuen Kategorie $\mathsf{Hot}_{\mathcal{A}}$ nehmen wir nun $(C^\bullet, [d^\bullet]_\sim)$, wobei $(C^\bullet, d^\bullet) \in \operatorname{Ob} \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}$ sei.

Die Verschiebefunktoren $[k]$ aus $\mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}$ liefern Automorphismen von Hot.

Analog bilden wir diesen Quotienten für $\mathsf{Ket}^+_{\mathcal{A}}$, $\mathsf{Ket}^-_{\mathcal{A}}$, $\mathsf{Ket}^b_{\mathcal{A}}$ und bezeichnen die Resultate mit $\mathsf{Hot}^+_{\mathcal{A}}$, $\mathsf{Hot}^-_{\mathcal{A}}$, $\mathsf{Hot}^b_{\mathcal{A}}$.

2.4 Hauptlemma der homologischen Algebra

Definition 10. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein Objekt $I \in \mathcal{C}$ heißt **injektives Objekt**, falls für jeden Monomorphismus $X \hookrightarrow Y$ in $\mathcal{C}$ der durch den kovarianten Hom-Funktor induzierte Morphismus $\mathcal{C}(X, I) \to \mathcal{C}(Y, I)$ surjektiv ist, wenn sich also jeder Morphismus $Y \to I$ entlang $X \hookrightarrow Y$ zurückziehen lässt auf einen Morphismus $X \to I$.

Satz 2 (Hauptlemma der homologischen Algebra)**.** *Sei in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ein Komplex $C \in \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{H}^q C = 0$ für $q > 0$ und ein Komplex $I \in \mathsf{Ket}^+_{i\mathcal{A}}$ injektiver Objekte mit $I^q = 0$ für $q < 0$ gegeben. Dann induziert die nullte Homologie eine Bijektion*

$$\mathsf{Hot}_{\mathcal{A}}(C, I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(\mathcal{H}^0 C, \mathcal{H}^0 I)$$

2.5 Die Homotopiekategorie ist trianguliert

Definition 11. Für eine Kettenabbildung $f \in \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}(C^\bullet, D^\bullet)$ definiere den **Abbildungskegel** als den Komplex $K(f) \in \mathsf{Ket}_{\mathcal{A}}$ mit $K(f)^\bullet := [1]C^\bullet \oplus D^\bullet$, d.h. $K(f)^i = C^{i+1} \oplus D^i$ und $d^\bullet := \begin{pmatrix} [1]d^\bullet & 0 \\ f^\bullet & d^\bullet \end{pmatrix}$, d.h. $d^i = \begin{pmatrix} -d^{i+1} & 0 \\ f^i & d^i \end{pmatrix}$.

Satz 3. *Die Homotopiekategorie einer abelschen Kategorie ist mit dem Verschiebefunktor* $[1]$ *trianguliert, wenn wir alle Dreiecke auszeichnen, die zu einem Dreieck der folgenden Form isomorph sind:*

$$X \xrightarrow{f} Y \to K(f) \to [1]X \tag{$*$}$$

Beweis. (Idee)

1. Jedes zu einem ausgezeichneten Dreieck isomorphen ist per definitionem selbst ausgezeichnet.

2. Für jedes Objekt X ist $X \xrightarrow{\mathrm{id}} X \to 0 \to [1]X$ ausgezeichnet, weil $\mathrm{id}_{K(f)}$ nullhomotop ist via $s := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, denn

$$\mathrm{id}_{K(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d^i & 0 \\ 1 & d^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^{i+1} & 0 \\ 1 & d^i \end{pmatrix} = d^{i-1} \circ s^i + s^{i+1} \circ d^i$$

3. Jeder Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ ist Teil eines ausgezeichneten Dreiecks $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to [1]X$ per definitionem mit $Z := K(f)$.

4. $X \xrightarrow{x} Y \to Z \to [1]X$ ist ausgezeichnet genau dann wenn das “gedrehte Dreieck” $Y \to Z \to [1]X \xrightarrow{-x} [1]Y$ ausgezeichnet ist:

   Ohne Einschränkungen ist $Z = K(x)$. Wir konstruieren eine Homotopieäquivalenz $[1]X \to K(\alpha)$, wobei α die Inklusion $Y \to K(x)$ sein soll. Es ist $K(\alpha)^n = Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n$, das Differential lässt sich als 3×3-Matrix auffassen. Die Abbildung $\varphi : [1]X \to K(\alpha)$ sei gegeben durch $\varphi^n := (0, \mathrm{id}_{X^{n+1}}, 0)$, die Abbildung $\psi : K(\alpha) \to [1]X$ sei gegeben durch $\psi^n := (-f^{n+1}, \mathrm{id}_{X^{n+1}}, 0)^t$. Dann gilt $\psi^n \circ \varphi^n = \mathrm{id}_{X^{n+1}}$, anders gesprochen $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{[1]X}$. Die Abbildung $s : [1]K(\alpha) \to K(\alpha)$, die gegeben ist durch die 3×3-Matrix mit id_{Y^n} in der rechten oberen Ecke und sonst nur 0 ist dann eine Kettenhomotopie von $\varphi \circ \psi$ zur Identität.

5. Gegeben zwei ausgezeichnete Dreiecke und ein kommutatives Quadrat (links)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] & {[1]X} \arrow[d, "{[1]f}"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & {[1]X'} \end{tikzcd}$$

   gibt es einen Morphismus $h : Z \to Z'$ sodass alle entstehenden Quadrate kommutieren.

6. (**Oktaederaxiom**) Zum Beweis des Oktaederaxioms siehe Topologie-Skript, das ist auch nur Matrizenmultiplikation.

□

Index