

# Vortragsausarbeitung

## “Postnikov-Türme, $k$ -Invarianten und Hindernisse”

### Seminar Homotopietheorie bei Prof. Goette Wintersemester 2008/09



Konrad Voelkel

13. Dezember 2008

#### Inhaltsverzeichnis

<b>1 Voraussetzung</b>	<b>2</b>
1.1 Grundlagen	2
1.1.1 (Ko)Faserungen	2
1.1.2 Suspension, Schleifenraum und Eilenberg-MacLane-Räume	5
1.1.3 Limes und Colimes	7
1.2 Wiederholung Homologie	7
1.2.1 Lange exakte Sequenzen	7
1.2.2 Ausschneidung	7
1.2.3 Künneth-Formel und Universelle Koeffizienten	8
1.2.4 Darstellbare Homologie	8
1.3 Wiederholung Homotopie	8
1.3.1 Lange exakte Sequenzen	9
1.3.2 CW-Approximation	9
1.3.3 Ausschneidung	10
1.3.4 Satz von Hurewicz	10
<b>2 Postnikov-Türme</b>	<b>11</b>
2.1 Postnikov-Türme aus Faserungen	11
2.2 Postnikov-Türme aus prinzipalen Faserungen	14
2.3 Moore-Postnikov-Türme aus prinzipalen Faserungen	16
<b>3 Lifting- und Erweiterungs-Problem</b>	<b>18</b>
3.1 Hindernistheorie	18

**Hinweis** Dies ist eine ausführliche Zusammenfassung von Stoff, der für den Vortrag “Postnikov Türme und  $k$ -Invarianten” relevant oder interessant ist. Die Teile, die mit “ Vortrag” markiert


sind, sind Teil des Vortrags, der Rest wird vorausgesetzt. An einigen Stellen sind auch Literaturhinweise mit “ [H] 1.23” für z.B. Hatcher Proposition 1.23 angegeben. Besonders wichtige Stellen, die aus Zeitgründen nicht im Vortrag wiederholt werden, sind mit “ wichtig!” markiert.

# 1 Voraussetzung

In diesem Abschnitt sind keine Beweise zu finden.

## 1.1 Grundlagen

### 1.1.1 (Ko)Faserungen

**Definition 1.** Eine **Faserung** ist eine stetige Abbildung  $p : E \rightarrow B$  von topologischen Räumen  $E, B \in \text{Top}$ , die die **HLP = Homotopy Lifting Property** zu jedem topologischen Raum erfüllt. Man nennt  $E$  den **Totalraum** und  $B$  die **Basis** der Faserung.  wichtig!


$p : E \rightarrow B$  erfüllt die HLP zu einem topologischen Raum  $X \in \text{Top}$ , wenn zu je zwei stetigen Abbildungen  $h : X \times I \rightarrow B$  und  $f : X \rightarrow E$  sodass das folgende Diagramm kommutiert, eine stetige Abbildung  $H : X \times I \rightarrow E$  wie im Diagramm existiert:


$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ (\text{id}_X, 0) \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$


**Definition 2.** Eine **Kofaserung** ist eine stetige Abbildung  $i : A \rightarrow X$  von topologischen Räumen  $A, X \in \text{Top}$ , die die **HEP = Homotopy Extension Property** zu jedem topologischen Raum erfüllt.

$i : A \rightarrow X$  erfüllt die HEP zu einem topologischen Raum  $Y \in \text{Top}$ , wenn zu je zwei stetigen Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $h : A \rightarrow Y^I$  sodass das folgende Diagramm kommutiert, eine Abbildung  $H : X \rightarrow Y^I$  wie im Diagramm existiert:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & Y^I \\ i \downarrow & \nearrow H & \downarrow \text{proj}_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

**Definition 3.**  $f : X \rightarrow Y$  heißt **schwache Homotopieäquivalenz**, wenn  $f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$  Iso für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $x_0 \in X$ .  wichtig!

**Definition 4.** Das Analogon zu Kern und Cokern im topologischen sind Faser bzw. Kofaser einer Faserung bzw. Kofaserung: Sei  $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$  eine Faserung (mit  $p(e_0) = b_0$ ), dann heißt  $F := p^{-1}(b_0)$  die **Faser** der Faserung. Sei  $i : (A, a_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine Kofaserung (mit  $i(a_0) = x_0$ ), dann heißt  $C := X/A$  die **Kofaser** der Kofaserung.  Vortrag

**Definition 5.**  Vortrag

$$E_f := \{(x, \gamma) \in X \times Y^I \mid \gamma(0) = f(x)\} \quad (\text{Abbildungswegeraum})$$

$$F_f := \{(x, \gamma) \in E_f \mid \gamma(1) = y_0\} \quad (\text{Homotopiefaser})$$

**Definition 6.** Seien  $p_1 : E_1 \rightarrow B$  und  $p_2 : E_2 \rightarrow B$  zwei Faserungen über dem selben Basisraum. Dann heißt eine Abbildung  $f : E_1 \rightarrow E_2$  **faserverträglich**, wenn  $p_1 = p_2 \circ f$  (im kategoriellen Sinne also eine Abbildung über  $B$ ). Eine faserverträgliche Abbildung  $f : E_1 \rightarrow E_2$  heißt **Faserhomotopieäquivalenz**, wenn es  $g : E_2 \rightarrow E_1$  faserverträglich gibt sodass  $f \circ g$  und  $g \circ f$  homotop zu den jeweiligen Identitäten via faserverträglichen Abbildungen sind.

☞ Vortrag

Zu einer Faserung  $p : E \rightarrow B$  und einer Abbildung  $f : A \rightarrow B$  definiere den **Pullback** der Faserung  $f^*(E) \rightarrow A$  als  $f^*(E) := \{(a, e) \in A \times E \mid f(a) = p(e)\}$  mit der Projektion auf die erste Komponente als Abbildung. Somit ist  $f^*(E)$  der Pullback im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

und die Abbildung  $f^*(E) \rightarrow A$  ist die Abbildung aus dem Pullback (im kategoriellen Sinne).

**Definition 7.** Sei  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  eine stetige Abbildung von Räumen mit Basispunkt. Dann definiere

☞ wichtig!

$$\begin{aligned} I &:= [0, 1] \subset \mathbb{R} \\ ZX &:= X \times I && \text{(Zylinder)} \\ CX &:= ZX/\sim, \text{ mit } (x, 1) \sim (x', 1) && \text{(Kegel)} \\ SX &:= ZX/\sim, \text{ mit } (x, 1) \sim (x', 1), (x, 0) \sim (x', 0) && \text{(Suspension)} \\ \tilde{C}X &:= CX/\sim, \text{ mit } (x_0, t) \sim (x_0, t') && \text{(reduzierter Kegel)} \\ \Sigma X &:= SX/\sim, \text{ mit } (x_0, t) \sim (x_0, t') && \text{(reduzierte Suspension)} \\ X^I &:= \{I \rightarrow X\} \text{ mit KO-Topologie} && \text{(unpunktierter Wegerraum)} \\ \Omega X &:= \{\gamma : (S^1, s_0) \rightarrow (X, x_0)\} \subset X^{S^1} && \text{(Schleifenraum)} \\ M_f &:= Y \cup_f ZX && \text{(Abbildungszylinder)} \\ C_f &:= Y \cup_f CX && \text{(Abbildungskegel)} \\ E_f &:= \{(x, \gamma) \in X \times Y^I \mid \gamma(0) = f(x)\} && \text{(Abbildungswegerraum)} \\ F_f &:= \{(x, \gamma) \in E_f \mid \gamma(1) = y_0\} && \text{(Homotopiefaser)} \end{aligned}$$

**Lemma 8.** Sei  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  eine stetige Abbildung von Räumen mit Basispunkt. Dann gelten:

☞ wichtig!

1.  $X$  und  $ZX$  sind homotopieäquivalent,
2.  $Y$  und  $M_f$  sind homotopieäquivalent,
3.  $X$  und  $E_f$  sind homotopieäquivalent,
4.  $f$  induziert eine basispunkterhaltende Abbildung  $ZX \rightarrow Y$ ,
5.  $f$  induziert einen Monomorphismus  $X \hookrightarrow C_f$ ,
6.  $f$  induziert eine Kofaserung  $X \hookrightarrow M_f$ ,
7.  $f$  induziert eine Faserung  $E_f \rightarrow Y$ ,

☞ Vortrag

☞ Vortrag

8.  $f$  faktorisiert über  $M_f$  in eine Kofaserung und eine Homotopieäquivalenz,
9.  $f$  faktorisiert über  $E_f$  in eine Homotopieäquivalenz und eine Faserung,
10. die Faser von  $f : E_f \rightarrow Y$  ist genau  $F_f$ ,
11. die Kofaser von  $f : X \hookrightarrow M_f$  ist genau  $C_f$ ,
12. wenn  $f$  nullhomotop ist, so induziert die Nullhomotopie eine Abbildung  $CX \rightarrow Y$ ,
13. wenn  $f$  basispunkterhaltend nullhomotop ist, sogar  $\tilde{C}X \rightarrow Y$ ,
14. entsprechend induziert  $f$  Abbildungen  $SX \rightarrow Y$  bzw.  $\Sigma X \rightarrow Y$ ,

☞ Vortrag

☞ Vortrag

Beweis. Übungsaufgabe! □

**Lemma 9.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. In den folgenden Diagrammen sind  $E_f$  ein Pullback (links) und  $M_f$  ein Pushout (rechts):

☞ wichtig!

☞ Vortrag

$$\begin{array}{ccc}
 E_f \hookrightarrow Y^I & & X \xrightarrow{f} Y \\
 \downarrow \wr & \downarrow \gamma \mapsto \gamma(0) & \downarrow \wr \\
 X \xrightarrow{f} Y & & X \times I \xrightarrow{\pi} M_f \\
 & & \downarrow x \mapsto (x,0)
 \end{array}$$

**Bemerkung 10.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Wenn man die induzierte Faserung  $E_f \rightarrow Y$  betrachtet, so hat diese eine Faser  $F_f$ , genannt **Homotopiefaser** von  $f$ . Wenn  $f$  bereits eine Faserung ist, so ist die Inklusion  $X \hookrightarrow E_f$  sogar eine Faserhomotopieäquivalenz und damit stimmt die Homotopiefaser von  $f$  mit der Faser von  $f$  bis auf Homotopieäquivalenz überein.

☞ Vortrag

**Lemma 11.** Für eine Faserung  $p : E \rightarrow B \times I$  sind die Einschränkungen

☞ Vortrag

$$E_t := p^{-1}(B \times \{t\}) \rightarrow B \times \{t\} \xrightarrow{\sim} B$$

faserhomotopieäquivalent für  $t \in [0, 1]$ .

**Beweis.** Ein Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow I$  liefert eine fasererhaltende Abbildung  $L_\gamma : E_{\gamma(0)} \rightarrow E_{\gamma(1)}$ , indem man die Homotopie  $g_t : E_{\gamma(0)} \rightarrow B \times I$ ,  $g_t(x) := (p(x), \gamma(t))$  entlang  $p$  liftet, das liefert  $\tilde{g}_t : E_{\gamma(0)} \rightarrow E$  mit  $\tilde{g}_0 : E_{\gamma(0)} \hookrightarrow E$  Inklusion, setze dann  $L_\gamma := \tilde{g}_1 : E_{\gamma(0)} \rightarrow E_{\gamma(1)}$ .

Die Abbildung  $\gamma \mapsto L_\gamma$  hat zwei Eigenschaften:

- a) Wenn  $\gamma \simeq \gamma'$  relativ  $\partial I$ , so ist  $L_\gamma \simeq L_{\gamma'}$ . Insbesondere ist die Homotopieklasse von  $L_\gamma$  unabhängig von der Wahl des Lifts  $\tilde{g}_t$  von  $g_t$ .
- b) Für eine Komposition von Wegen  $\gamma * \gamma'$  ist  $L_{\gamma * \gamma'} \simeq L_{\gamma'} \circ L_\gamma$ .

Wenn wir das beweisen können, folgt damit schon direkt, dass  $L_\gamma$  Faserhomotopieäquivalenz mit Homotopieinverser  $L_{\bar{\gamma}}$  ist.

Also: a) Wenn  $\gamma \simeq \gamma'$  relativ  $\partial I$ , so haben wir eine Homotopie  $h_s : [0, 1] \rightarrow I$  mit  $h_0 = \gamma$  und  $h_1 = \gamma'$  und eine Abbildung

$$g_{t,s}(x) := (p(x), h_s(t))$$

dessen Lift  $\tilde{g}_{t,s}$  entlang  $p$  eine Homotopie

$$\tilde{g}_{1,s} : E_{\gamma(0)} \rightarrow E_{\gamma(1)} \text{ mit } \tilde{g}_{1,0} = L_\gamma \text{ und } \tilde{g}_{1,1} = L_{\gamma'}$$

induziert.

b) Für  $\gamma * \gamma'$  ist

$$L_{\gamma'} \circ L_{\gamma} = \tilde{g}'_1 \circ \tilde{g}_1 : E_{\gamma(0)} \rightarrow E_{\gamma(1)} = E_{\gamma'(0)} \rightarrow E_{\gamma'(1)}$$

und einen Lift von  $L_{\gamma * \gamma'}$  erhält man über  $\tilde{g}'_1 * \tilde{g}_1$ , d.h. das Verketteten der Homotopien.  $\square$

**Lemma 12.** Sei  $f : E \rightarrow B$  eine Faserung und  $h : A \times I \rightarrow B$  eine stetige Abbildung, also eine Homotopie zwischen  $h_0$  und  $h_1$ . Dann sind  $h_0^*f$  und  $h_1^*f$  Faserhomotopieäquivalent (siehe Def. 6).

⊗ Vortrag

⊗ [H] 4.62

Ist  $g : A \rightarrow B$  konstant und  $p : PB \rightarrow B$  die Wegefaserung mit  $PB := \{(e, \gamma) \in B \times B^I \mid \gamma(0) = e\}$ , so ist  $g^*(PB) = \Omega B$ .

*Beweis.* Wir können den Pullback  $h^*f$  bilden, das ist die Faserung  $h^*(E) \rightarrow A \times I$  mit  $h^*(E) = \{(e, \gamma) \in (A \times I) \times B^I \mid \gamma(0) = h(e)\}$  und der Projektion auf die erste Komponente als Abbildung, das ist gerade der Pullback im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ & \downarrow f & \\ A \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Der Raum  $h^*(E)$  enthält natürlich die Räume  $E_t := h_t^*(E) = h^*(p)^{-1}(A \times \{t\})$  und wir müssen nur noch nach vorigem Lemma die Faserhomotopieäquivalenz aller Faserungen  $h_t^*(p) = E_t \rightarrow B$  einsehen.  $\square$

**Definition 13.** Wenn in einer Sequenz von Abbildungen

$$\dots \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow \dots$$

je zwei aufeinander folgende Abbildungen  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$  eine Faserung bilden, d.h.  $Y \rightarrow Z$  ist Faserung mit Homotopiefaser  $X$ , so heißt diese Sequenz **Fasersequenz**.

### 1.1.2 Suspension, Schleifenraum und Eilenberg-MacLane-Räume

**Definition 14.** Für Räume  $X, Y$  definiere

$$[X, Y] := \mathcal{C}(X, Y) / \sim, \text{ wobei } \sim \text{ die Homotopie von Abbildungen ist,}$$

$$\langle X, Y \rangle := \mathcal{C}(X, Y) / \sim, \text{ wobei } \sim \text{ die Homotopie von b.p.e. Abbildungen ist.}$$

**Lemma 15** (Adjunktion von Suspension und Schleifenraum). Für Räume  $X, Y$  gilt in der Kategorie der kompakt erzeugten Räume und für lokalkompakte  $X, Y$  auch in der Kategorie  $\text{Top}$ :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{C}(X \times S^1, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y^{S^1}) & (\text{via } ((x, s) \mapsto Y) \mapsto ((x, -) \mapsto Y^{S^1})) \\ \mathcal{C}(\Sigma X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, \Omega Y) & (\text{der punktierte Fall}) \\ [\Sigma X, Y] \xrightarrow{\sim} [X, \Omega Y] & (\text{alle Urbilder von Bildern sind homotop}) \\ \langle \Sigma X, Y \rangle \xrightarrow{\sim} \langle X, \Omega Y \rangle & \\ \langle S^{n+1}, Y \rangle \xrightarrow{\sim} \langle S^n, \Omega Y \rangle & \\ \pi_q(Y) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\Omega^q Y) & (\text{wegen } SS^n \xrightarrow{\sim} S^{n+1}) \end{array}$$

*Beweis.* Übungsaufgabe! □

**Lemma 16.** *Ist  $F \rightarrow E \rightarrow B$  eine Faserung mit kontrahierbarem  $E$ , so gibt es eine schwache Homotopieäquivalenz  $F \rightarrow \Omega B$ .* ☞ wichtig!

**Definition 17.** Eine Faserung  $F \rightarrow E \rightarrow B$  heißt **prinzipal**, wenn es ein kommutatives Diagramm ☞ Vortrag

$$\begin{array}{ccccccc} F & \longrightarrow & E & \longrightarrow & B & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \Omega B' & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & B' \end{array}$$

gibt, in dem die zweite Zeile eine Fasersequenz ist und die vertikalen Abbildungen schwache Homotopieäquivalenzen sind.

**Definition 18.** Ein Raum  $K$  heißt **Eilenberg-MacLane-Raum**  $K(\pi, n)$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\pi \in \text{Ab}$ , wenn

$$\pi_i(K) = \begin{cases} \pi, & i = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

wenn also die Homotopie im Grad  $n$  konzentriert und dort  $\pi$  ist.

**Satz 19** (Milnor 1959). *Der Schleifenraum eines CW-Komplexes hat den Homotopietyp eines CW-Komplexes.*

**Korollar 20.** *Die Adjunktion von Suspension und Schleifenraum (Lemma 15) liefert für Eilenberg-MacLane-Räume:* ☞ wichtig!

$$\Omega K(\pi, n) \xrightarrow{\sim} K(\pi, n+1).$$

**Satz 21.** *Zu jeder abelschen Gruppe  $\pi$  und jeder natürlichen Zahl  $n$  existiert ein  $K(\pi, n)$  vom CW-Typ, der bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig ist.*

*Beweis.* Betrachte die Gruppe  $\pi$  mit Erzeugern  $x_\alpha$  und Relationen  $r_\beta$ . Zunächst konstruieren wir den Raum  $\tilde{K} := \bigvee_\alpha S_\alpha^n$ , den Wedge von je einer  $n$ -Sphäre pro Erzeuger  $x_\alpha$  von  $\pi$ . Der Raum  $\tilde{K}$  hat nun keine Homotopie unterhalb von Grad  $n$  (wegen zellulärer Approximation), allerdings möglicherweise höhere Homotopie oberhalb von Grad  $n$  und bei Grad  $n$  eine freie abelsche Gruppe. Die Erzeuger lassen sich als Abbildungen  $S^n \rightarrow \tilde{K}$  auffassen, wobei  $x_\alpha$  zu der Abbildung korrespondiert, die  $S^n$  auf  $S_\alpha^n$  einbettet. Somit liefern die Relationen Abbildungen  $S^{n+1} \rightarrow \tilde{K}$ , via denen man nun pro Relation  $r_\beta$  eine Zelle  $e_\beta^{n+1}$  einklebt. Nun hat der so entstehende Raum  $\tilde{K} \cup_\beta e_\beta^{n+1}$  im Grad  $n$  genau die Homotopiegruppe  $\pi$ . Die höheren Homotopiegruppen lassen sich durch ankleben höherer Zellen killen, ohne Grad  $n$  und tiefer zu verändern. Der so konstruierte Raum  $K$  ist vom CW-Typ und für jeden weiteren Eilenberg-MacLane-Raum  $K(\pi, n)$  vom CW-Typ lässt sich leicht ein Isomorphismus der Homotopiegruppen angeben, der sich aufgrund der Konstruktion von  $K$  auf eine stetige Abbildung der Räume hochheben lässt. Also gibt es zwischen den beiden  $K(\pi, n)$  eine schwache Äquivalenz, nach dem Satz von Whitehead eine Homotopieäquivalenz. □

**Definition 22.** Ein Raum  $M$  heißt **Moore-Raum**  $M(\pi, n)$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\pi \in \text{Ab}$ , wenn

$$\tilde{H}_i(M) = \begin{cases} \pi, & i = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

wenn also die Homologie im Grad  $n$  konzentriert und dort  $\pi$  ist.

### 1.1.3 Limes und Colimes

**Definition 23.** Sei  $\mathcal{D}$  eine kleine Kategorie und  $\mathcal{C}$  eine beliebige Kategorie. Zu jedem Objekt  $C \in \mathcal{C}$  betrachte den konstanten Funktor  $\underline{C} \in \mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ , der alle Objekte auf  $C$  und alle Morphismen auf  $\text{id}_C$  abbildet.

Ein **Kolimes** von  $F \in \mathcal{C}^{\mathcal{D}}$  besteht aus einem Objekt  $\text{colim } F \in \mathcal{C}$  und einer natürlichen Transformation  $\iota : F \rightarrow \underline{\text{colim } F}$ , die initial ist unter allen Transformationen von  $F$  in konstante Funktoren.

Ein **Limes** von  $F \in \mathcal{C}^{\mathcal{D}}$  besteht aus einem Objekt  $\text{lim } F \in \mathcal{C}$  und einer natürlichen Transformation  $\pi : \underline{\text{lim } F} \rightarrow F$ , die terminal ist unter allen Transformationen von konstanten Funktoren nach  $F$ .

**Definition 24.** Eine halbgeordnete Menge  $(I, \leq)$  heißt **filtrierend**, wenn  $\forall i, j \in I \exists k \in I : i, j \leq k$ . Fasse  $I$  als Kategorie auf, indem die Objekte den Elementen entsprechen und für jede Relation  $i \leq j$  ein Morphismus  $i \rightarrow j$  existiert.

(Ko)limiten von  $\mathcal{C}^I$  heißen **filtrierend**. Kolimiten über  $I = \mathbb{N}$  werden auch  $\text{colim}_n$  oder  $\varinjlim$  geschrieben und injektiver oder **induktiver Limes** genannt. Limiten über  $I = \mathbb{N}$  werden auch  $\text{lim}_n$  oder  $\varprojlim$  geschrieben und projektiver oder **inverser Limes** genannt.

**Lemma 25.** Zu einer Sequenz  $\cdots \rightarrow X_2 \rightarrow X_1$  von topologischen Räumen ist  $\varinjlim X_i$  genau der Unterraum von  $\prod_{i \geq 1} X_i$ , der aus den Folgen  $(x_i)_{i \geq 1}$  besteht, für die  $x_n \mapsto x_{n-1}$  unter der Abbildung  $X_n \rightarrow X_{n-1}$  gilt.

☞ Vortrag

Zu einer Sequenz  $\cdots \rightarrow G_2 \rightarrow G_1$  von Gruppen ist  $\varinjlim G_i$  genau die Untergruppe von  $\prod_{i \geq 1} G_i$ , die aus den Folgen  $(g_i)_{i \geq 1}$  besteht, für die  $g_n \mapsto g_{n-1}$  unter der Abbildung  $G_n \rightarrow G_{n-1}$  gilt.

## 1.2 Wiederholung Homologie

### 1.2.1 Lange exakte Sequenzen

*Bemerkung 26.* Ist  $(X, A)$  ein topologisches Paar, so haben wir eine lange exakte Sequenz:

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \rightarrow \cdots \rightarrow H_0(X, A) \rightarrow 0$$

Ist  $(X, A, B)$  ein topologisches Tripel, so haben wir eine lange exakte Sequenz:

$$\cdots \rightarrow H_n(A, B) \rightarrow H_n(X, B) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A, B) \rightarrow \cdots$$

**Satz 27.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $A \subseteq X$  abgeschlossen,  $A \neq \emptyset$  und  $A$  Deformationsretrakt einer Umgebung von  $A$  in  $X$ . Seien  $i : A \hookrightarrow X$  Inklusion und  $j : X \rightarrow X/A$  Projektion, dann erhalten wir eine lange exakte Sequenz:

☞ [H] 2.13

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \cdots \rightarrow \tilde{H}_0(X/A) \rightarrow 0$$

### 1.2.2 Ausschneidung

**Satz 28** (Ausschneidung). Sei  $(X, A, Z)$  ein topologisches Tripel, sodass  $\bar{Z} \subset (\circ A)$ . Dann induziert die Inklusion  $(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$  Isomorphismen auf der Homologie für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\sim} H_n(X, A).$$

Äquivalent: Seien  $A, B \subset X$  und  $A \cup B = X$ . Dann induziert die Inklusion  $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$  Isomorphismen auf der Homologie für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$H_n(B, A \cap B) \xrightarrow{\sim} H_n(X, A).$$

### 1.2.3 Künneth-Formel und Universelle Koeffizienten

**Satz 29** (Künneth-Formel). Seien  $X, Y$  CW-Komplexe und  $R$  ein Ring sodass  $H^k(Y; R)$  ein endlich erzeugter freier  $R$ -Modul ist für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dann ist

$$H^*(X; R) \otimes_R H^*(Y; R) \rightarrow H^*(X \times Y; R)$$

ein Ringisomorphismus.

**Satz 30** (Universelle Koeffizienten für Homologie). Sei  $C$  ein Kettenkomplex abelsch freier Gruppen und  $G$  eine abelsche Gruppe, dann gibt es  $\forall n \in \mathbb{N}$  eine in  $C$  natürliche kurze exakte Sequenz, die unnatürlich spaltet:

$$0 \rightarrow H_n(C; \mathbb{Z}) \otimes G \rightarrow H_n(C; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(C), G) \rightarrow 0$$

**Satz 31** (Universelle Koeffizienten für Kohomologie). Sei  $C$  ein Kettenkomplex abelsch freier Gruppen und  $G$  eine abelsche Gruppe, dann gibt es eine kurze exakte Sequenz, die spaltet:

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C), G) \rightarrow H^n(C; G) \xrightarrow{h} \text{Hom}(H_n(C), G) \rightarrow 0$$

**Korollar 32.** Wenn für einen Kettenkomplex  $C$  gilt:  $H_n(C) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so ist auch  $\text{Hom}(H_n(C), G) = \text{Hom}(0, G) = 0$  und  $\text{Ext}(H_{n-1}(C), G) = \text{Ext}(0, G) = 0$  für alle abelschen Gruppen  $G$  und somit  $H^n(C; G) = 0$ .

Wenn  $C = C_*(X, A)$  der Kettenkomplex relativer zellulärer Ketten eines CW-Paares  $(X, A)$  ist, so folgt auf  $H_n(X, A) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  auch  $H^{n+1}(X, A; \pi_n(X)) = 0$ .

Erinnerung:  $C_q(X, A) = \frac{C_q(X)}{C_q(A)}$  und  $C_q(X) = \mathbb{Z}[X^q \setminus X^{q-1}]$ , d.h. Linearkombinationen von Zellen der Dimension  $q$ .

### 1.2.4 Darstellbare Homologie

**Satz 33.** Die Funktoren  $T^n : X \mapsto \langle X, K(\pi, n) \rangle$  definieren eine reduzierte Kohomologietheorie von CW-Komplexen  $X$  (für  $n > 0$  und  $\pi$  eine abelsche Gruppe), deren induzierte Kohomologietheorie von topologischen Räumen zur singulären Kohomologie isomorph ist.

**Definition 34.** Ein Präspektrum ist eine Folge aus  $\text{Top}^*$   $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Morphismen  $\sigma : \Sigma T_n \rightarrow T_{n+1}$  aus  $\text{Top}^*$ .

**Beispiel 35.** Das  $\Omega$ -Spektrum  $(K(\pi, n))$  mit der bekannten schwachen Äquivalenz  $\bar{\sigma} : T_n \rightarrow \Omega T_{n+1}$ , deren adjungierte  $\sigma : \Sigma T_n \rightarrow T_{n+1}$  die Präspektrabbildungen liefern.

**Definition 36.** Sei  $(T_n)$  ein Präspektrum mit  $T_n$   $(n-1)$ -zusammenhängend vom CW-Typ. Dann definiere  $\tilde{E}_q(X) := \text{colim}_n \pi_{n+q}(X \wedge T_n)$ , wobei der Kolimes über die folgende Abbildung läuft:

$$\pi_{n+q}(X \wedge T_n) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{n+q+1}(X \wedge (T_n \wedge S^1)) \xrightarrow{\sim} \pi_{n+q+1}(X \wedge \Sigma T_n) \xrightarrow{(\text{id} \wedge \sigma)_*} \pi_{n+q+1}(X \wedge T_{n+1})$$

**Satz 37.**  $\tilde{E}_q$  definiert eine verallgemeinerte reduzierte CW\*-Homologietheorie.

### 1.3 Wiederholung Homotopie

**Lemma 38** (Kompression). Sei  $(X, A)$  ein CW-Paar und  $(Y, B)$  ein Paar mit  $B \neq \emptyset$ . Falls für alle  $n \in \mathbb{N}$ , in denen  $X \setminus A$  Zellen der Dimension  $n$  hat,  $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$  für alle  $y_0 \in B$  ist, so ist jede Abbildung  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  homotop relativ  $A$  zu einer Abbildung  $X \rightarrow B$ .

**Lemma 39** (Erweiterung). Sei  $(X, A)$  ein CW-Paar und  $Y$  wegzusammenhängend. Falls für alle  $n \in \mathbb{N}$ , in denen  $X \setminus A$  Zellen der Dimension  $n$  hat,  $\pi_{n-1}(Y) = 0$  ist, so ist jede Abbildung  $f : A \rightarrow Y$  fortsetzbar zu einer Abbildung  $X \rightarrow Y$ .



### 1.3.1 Lange exakte Sequenzen

**Satz 40.** Sei  $(X, A, x_0)$  ein topologisches Paar mit Basispunkt, d.h.  $x_0 \in A \subseteq X$ . Dann induzieren die Inklusionen  $i : (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ ,  $j : (X, \{x_0\}, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$  eine lange exakte Sequenz [H] 4.3

$$\cdots \rightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(X, x_0)$$

wobei  $\partial$  die Restriktion von Abbildungen  $(D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  (Repräsentanten von Klassen in  $\pi_n(X, A, x_0)$ ) auf  $S^{n-1}$  ist (das liefert Klassen in  $\pi_{n-1}(A, x_0)$ ).

**Satz 41.** Sei  $(X, A, B, x_0)$  ein topologisches Tripel mit Basispunkt, d.h.  $x_0 \in B \subseteq A \subseteq X$ . Dann haben wir analog eine lange exakte Sequenz:

$$\cdots \rightarrow \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_1(X, A, x_0)$$

**Satz 42.** Sei  $p : E \rightarrow B$  eine Serre-Faserung, d.h. eine Abbildung, die die HLP (Def. 1) mindestens für  $D^k$  für alle  $k \geq 0$  hat. Für  $b_0 \in B$  und  $x_0 \in F := p^{-1}(b_0)$  ist  $p_* : \pi_n(E, F, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  ein Iso für  $n \geq 1$ . Wenn  $B$  wegzusammenhängend ist, so gibt es eine lange exakte Sequenz: [H] 4.41  
wichtig!

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, x_0) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(E, x_0) \rightarrow 0$$

### 1.3.2 CW-Approximation

**Satz 43** (Whitehead). Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine schwache Homotopieäquivalenz von CW-Komplexen, so ist  $f$  Homotopieäquivalenz.

**Definition 44.** Sei  $X$  topologischer Raum. Ein CW-Komplex  $Z$  mit einer schwachen Homotopieäquivalenz  $f : Z \rightarrow X$  heißt **CW-Approximation** von  $X$ .

**Definition 45.** Sei  $(X, A)$  ein topologisches Paar, wobei  $A$  ein nichtleerer CW-Komplex ist. Dann heißt ein Paar  $(Z, A)$  von CW-Komplexen mit  $Z$   $n$ -zusammenhängend und mit  $f : (Z, A) \rightarrow (X, A)$  sodass  $f|_A = \text{id}_A$  und  $f_* : \pi_i(Z) \rightarrow \pi_i(X)$  für  $i > n$  Iso und für  $i = n$  Mono ist,  **$n$ -zusammenhängendes CW-Modell** von  $(X, A)$ .

**Lemma 46.** Ist  $(X, A)$  ein topologisches Paar,  $A$  ein nichtleerer CW-Komplex, dann existieren für alle  $n \geq 0$   $n$ -zusammenhängende CW-Modelle  $f : (Z, A) \rightarrow (X, A)$ , sodass  $Z \setminus A$  nur Zellen von Dimension  $> n$  hat. [H] 4.13

**Lemma 47.** Gegeben  $n, n' \in \mathbb{N}$ ,  $n \leq n'$  und [H] 4.18

1. Ein  $n$ -zusammenhängendes CW-Modell  $f : (Z, A) \rightarrow (X, A)$ ,
2. Ein  $n'$ -zusammenhängendes CW-Modell  $f' : (Z', A') \rightarrow (X', A')$ ,
3. Eine Abbildung  $g : (X, A) \rightarrow (X', A')$ ,

so existiert eine Abbildung  $h : Z \rightarrow Z'$  sodass  $h|_A = g$  und  $g \circ f \simeq f' \circ h$  relativ  $A$ , wobei  $h$  eindeutig bis auf Homotopie relativ  $A$  ist. Das folgende Diagramm kommutiert also in der Homotopiekategorie:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ Z' & \xrightarrow{f'} & X' \end{array}$$

**Satz 48.** *Es gibt also einen Funktor, genannt CW-Approximations-Funktor*

☞ wichtig!

$$\mathbf{hTop} \rightarrow \mathbf{hCW}$$

der surjektiv auf Objekten ist. Dabei sind die Morphismen in  $\mathbf{hTop}$  Homotopieklassen stetiger Abbildungen und die Morphismen in  $\mathbf{hCW}$  die Homotopieklassen simplizialer Abbildungen.

**Lemma 49.** *Eine schwache Homotopieäquivalenz  $f : X \rightarrow Y$  induziert Isomorphismen  $f_* : H_n(X; G) \xrightarrow{\sim} H_n(Y; G)$  und Isomorphismen  $f^* : H^n(X; G) \xrightarrow{\sim} H^n(Y; G)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle Gruppen  $G$ .*

☞ [H] 4.21

☞ wichtig!

**Lemma 50.** *Eine schwache Homotopieäquivalenz  $f : Y \rightarrow Z$  induziert Bijektionen  $[X, Y] \xrightarrow{\sim} [X, Z]$  und  $\langle X, Y \rangle \xrightarrow{\sim} \langle X, Z \rangle$  für alle CW-Komplexe  $X$ . Dabei heißt  $[-, -]$  freie Homotopieklassen und  $\langle -, - \rangle$  freie Homotopieklassen mit Basispunkt.*

☞ [H] 4.22

### 1.3.3 Ausschneidung

**Satz 51** (Ausschneidung). *Sei  $X$  ein CW-Komplex mit Unterkomplexen  $A, B$  sodass  $C := A \cap B \neq \emptyset$ ,  $C$  zusammenhängend und  $X = A \cup B$  ist. Wenn  $(A, C)$   $m$ -zusammenhängend und  $(B, C)$   $n$ -zusammenhängend ist, dann induziert die Inklusion  $(A, C) \hookrightarrow (X, B)$  auf  $\pi_i$  einen Iso für  $i < m + n$  und einen Epi für  $i = m + n$ .*

☞ [H] 4.23

**Korollar 52** (Freudenthalscher Einhängungssatz). *Die Suspension  $S : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$  liefert eine Abbildung  $S : \pi_i(S^n) \rightarrow \pi_{i+1}(S^{n+1})$ , die für  $i < 2n - 1$  Iso und für  $i = 2n - 1$  Epi ist. Allgemein gilt dies für  $S : \pi_i(X) \rightarrow \pi_{i+1}(SX)$  für einen  $(n - 1)$ -zusammenhängenden CW-Komplex  $X$ .*

☞ [H] 4.24

**Korollar 53.** *Die Gradabbildung  $\pi_n(S^n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$  ist ein Isomorphismus für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $\pi_n(S^n)$  ist erzeugt von der Identität auf  $S^n$ .*

☞ [H] 4.25

**Lemma 54.** *Sei  $(X, A)$  ein  $r$ -zusammenhängendes CW-Paar und  $A$   $s$ -zusammenhängend. Dann induziert die Projektion  $(X, A) \rightarrow (X/A, x_0)$  auf  $\pi_i$  einen Iso für  $i \leq r + s$  und einen Epi für  $i = r + s + 1$ .*

☞ [H] 4.28

### 1.3.4 Satz von Hurewicz

**Lemma 55.** *Sei  $X$  ein CW-Komplex der Form  $(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n) \cup_{\beta} e_{\beta}^{n+1}$  für ein  $n \geq 1$ . Sei  $Y$  wegzusammenhängend. Dann existiert für jeden Gruppenhomomorphismus  $\psi : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$  ein stetiges  $f : X \rightarrow Y$  mit  $f_* = \psi$  auf Homotopiegruppen.*

☞ [H] 4.31

**Satz 56** (Hurewicz). *Sei  $X$  ein  $(n - 1)$ -zusammenhängender Raum mit  $n \geq 2$ . Dann ist  $\tilde{H}_i(X) = 0$  für  $i < n$  und*

☞ [H] 4.32

☞ wichtig!

$$h : \pi_n(X) \xrightarrow{\sim} H_n(X).$$

Sei  $(X, A)$  ein  $(n - 1)$ -zusammenhängendes topologisches Paar mit  $n \geq 2$ ,  $A \neq \emptyset$  und  $A$  einfach zusammenhängend. Dann ist  $H_i(X, A) = 0$  für  $i < n$  und

$$h : \pi_n(X, A) \xrightarrow{\sim} H_n(X, A).$$

**Korollar 57** (Whitehead!). *Seien  $X, Y$  einfach zusammenhängende CW-Komplexe. Dann ist eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz, genau dann wenn  $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  ein Isomorphismus für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist.*

☞ [H] 4.33

☞ wichtig!

## 2 Postnikov-Türme

*Bemerkung 58.* Wir wissen mit den Homotopiegruppen eines Raumes  $X$  sehr viel über den Raum, können ihn allerdings nicht bis auf Homotopieäquivalenz daraus zurückgewinnen, i.A. nicht einmal bis auf schwache Homotopieäquivalenz. Welche Invarianten muss man noch kennen, um den Raum zu konstruieren?

Vortrag

Wir werden sehen, dass diese Invarianten bestimmte Kohomologieklassen sind, wobei die Koeffizienten der Kohomologie Homotopiegruppen sind. Das motiviert auch, warum man bei Homologie allgemeine Koeffizienten zulassen will.

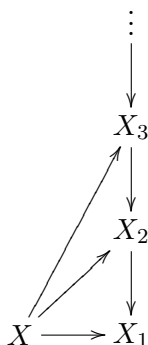
Mit den entwickelten Methoden lässt sich auch abschliessend die Frage beantworten, wann sich eine stetige Abbildung auf einen größeren/anderen Raum erweitern bzw. liften lässt. Die Antwort ist: Das hängt wiederum von bestimmten Kohomologieklassen ab.

Zentrales Werkzeug dabei ist das Zerlegen eines Raums in seinen Postnikov-Turm. Wir wiederholen kurz, was das ist und wieso es für CW-Komplexe stets einen Postnikov-Turm gibt. Dann werden wir sehen, wie man aus einem Postnikov-Turm einen Turm von Faserungen macht und schließlich, wann wir einen Turm aus prinzipalen Faserungen konstruieren können. Postnikov-Türme aus prinzipalen Faserungen ermöglichen uns dann das Auffinden der Invarianten, namentlich  $k$ -Invarianten und Hinderniskohomologieklassen.

### 2.1 Postnikov-Türme aus Faserungen

**Definition 59.** Sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Ein **Postnikov-Turm** für  $X$  ist ein kommutatives Diagramm

Vortrag



sodass

1.  $X \rightarrow X_n$  auf  $\pi_i$  einen Iso induziert für  $i \leq n$ ,
2.  $\pi_i(X_n) = 0$  für  $i > n$ .

**Beispiel 60.** Wir konstruieren einen Postnikov-Turm für einen CW-Komplex  $X$ , indem wir ein  $(n + 1)$ -zusammenhängendes CW-Modell  $(X_n, X)$  für  $(CX, X)$  konstruieren (siehe auch Satz 48). Die Inklusion  $X \hookrightarrow X_n$  kann man mit dem Erweiterungslemma (Lemma 39) fortsetzen zu einer Abbildung  $X_{n+1} \rightarrow X_n$ , denn  $X_{n+1}$  entsteht aus  $X$  durch Anfügen von Zellen der Dimension  $\geq n + 3$  und  $\pi_i(X_n) = 0$  für  $i > n$ .

wichtig!

**Beispiel 61** (Whitehead-Türme). Sei  $X$  ein CW-Komplex und  $\text{pt} = A \subseteq X$ . Dann ist der Postnikov-Turm, der aus den  $n$ -zusammenhängenden CW-Modellen für  $(X, A)$  besteht, von der Gestalt  $\cdots \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_0 \rightarrow X$ , wobei  $Z_n$   $n$ -zusammenhängend ist und die Abbildung  $Z_n \rightarrow X$  Isos auf  $\pi_i$  für  $i > n$  induziert.

Beobachtung:  $Z_0$  ist wegzusammenhängend und homotopieäquivalent zur Wegzusammenhangskomponente von  $X$ , die  $A$  enthält.  $Z_1$  ist einfach zusammenhängend und homotopieäquivalent zur universellen Überlagerung von  $Z_0$ . Analog lassen sich die höheren  $Z_n$  als “ $n$ -zusammenhängende Überlagerungen” sehen.

*Bemerkung 62.* Wenn man einen CW-Komplex  $X$  hat und z.B. dessen erste 5 Homologiegruppen ausrechnen möchte, so kann man dazu den Eintrag  $X_5$  aus seinem Postnikov-Turm verwenden. Will man aus einem Postnikov-Turm von  $X$  die komplette Homologie oder Homotopie ausrechnen, so benötigt man einen Limes (siehe 25). Dabei tauchen zwei Limiten auf: Einmal der topologische Raum  $\varprojlim_n X_n$ , von dem man z.B. Homotopie und Homologie ausrechnen möchte, andererseits die Gruppen  $\varprojlim_n \pi_i(X_n)$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , von denen wir erwarten, dass sie etwas mit der Homotopie von  $\varprojlim_n X_n$  zu tun haben.

📖 Vortrag

**Lemma 63.** Sei  $\cdots \xrightarrow{p_3} X_2 \xrightarrow{p_2} X_1$  eine Fasersequenz. Dann ist die natürliche Abbildung  $\lambda$ , die induziert wird von den Projektionen  $\text{proj}_k : \varprojlim X_n \rightarrow X_k$  auf Homotopie.

📖 Vortrag

📖 [H] 4.67

$$\begin{aligned} \lambda : \pi_i(\varprojlim X_n) &\rightarrow \varprojlim \pi_i(X_n) \\ [(f_n)_{n \in \mathbb{N}}] &\mapsto ([f_n])_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

surjektiv. Sie ist sogar injektiv, wenn die Abbildungen  $\pi_{i+1}(X_n) \rightarrow \pi_{i+1}(X_{n-1})$  für  $n \gg N$  surjektiv sind für ein  $N \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Zunächst die Surjektivität:

Sei  $([f_n])_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim \pi_i(X_n)$ . Dann sind die  $f_n$  von der Form  $f_n : (S^i, s_0) \rightarrow (X_n, x_0)$ . Die Faserung  $p_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$  bildet auf Homotopie  $[f_n]$  nach  $[f_{n-1}]$  ab, denn  $p_n$  hat nach Definition einer Faserung die HLE bezüglich  $(S^i, s_0)$ , also ist  $f_n$  homotop zu  $f'_n$  sodass  $p_n \circ f'_n = f_{n-1}$ . Wenn wir das induktiv für  $n \in \mathbb{N}$  machen, erhalten wir  $p_n \circ f_n = f_{n-1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , damit ist  $\lambda$  surjektiv.

Nun zur Injektivität:

Wir wissen, dass inverse Limiten nicht von einer endlichen Menge von Objekten am Ende der Sequenz abhängen, also ist die geforderte Bedingung genau so gut wie die Bedingung  $\pi_{i+1}(X_n) \rightarrow \pi_{i+1}(X_{n-1})$  surjektiv für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Sei eine Abbildung  $f : S^i \rightarrow \varprojlim X_n$  gegeben. Angenommen, wir hätten Nullhomotopien  $F_n : D^{i+1} \rightarrow X_n$  von den Koordinatenfunktionen  $f_n : S^i \rightarrow X_n$ , d.h.  $\lambda([f]) = 0$ . Dann müssen wir jetzt zeigen, dass  $f$  selbst nullhomotop ist, denn dann geht nur die 0 auf die 0.

Es gilt  $p_n \circ F_n|_{S^i} = F_{n-1}$  weil  $F_n|_{S^i} = f_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wir betrachten nun  $p_n \circ F_n$  und  $F_{n-1}$  als Abbildungen von abgeschlossenen Halbsphären, die auf dem Äquator  $S^i$  übereinstimmen. So haben wir eine Abbildung  $g_{n-1} : S^{i+1} \rightarrow X_{n-1}$ . Da  $\pi_{i+1}(X_n) \rightarrow \pi_{i+1}(X_{n-1})$  surjektiv ist, können wir von vornherein  $F_n$  so wählen, dass wir mit  $g_{n-1}$  eine nullhomotope Abbildung erhalten. Das heißt aber, dass  $p_n \circ F_n$  homotop zu  $F_{n-1}$  relativ  $S^i$  ist. Durch Anwendung der HLE von  $p_n$  bezüglich  $(D^{i+1}, S^i)$  erreichen wir  $p_n \circ F_n = F_{n-1}$ . Induktiv machen wir das für alle  $n \in \mathbb{N}$ , somit ist  $f : S^i \rightarrow \varprojlim X_n$  nullhomotop und  $\lambda$  also injektiv.  $\square$

**Korollar 64.** Sei  $X$  ein zusammenhängender CW-Komplex und  $\cdots \rightarrow X_2 \rightarrow X_1$  ein Postnikovturm für  $X$ . Dann ist die natürliche Abbildung  $X \rightarrow \varprojlim X_n$ , die induziert wird von allen Abbildungen  $X \rightarrow X_n$ , eine schwache Homotopieäquivalenz, also ist  $X$  eine CW-Approximation für  $\varprojlim X_n$ .

📖 Vortrag

📖 [H] 4.68

*Beweis.* Betrachte  $\pi_i(X) \rightarrow \pi_i(X_n)$ . Das ist ein Isomorphismus für  $i \leq n$ . Im inversen Limes auf der rechten Seite induziert das einen Isomorphismus  $\pi_i(X) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \pi_i(X_n)$ . Schaltet man den Isomorphismus  $\lambda$  dahinter, so erhält man  $\pi_i(X) \xrightarrow{\sim} \pi_i(\varprojlim X_n)$ , die von  $X \rightarrow \varprojlim X_n$  induzierte Abbildung. Damit ist das eine schwache Homotopieäquivalenz.  $\square$

*Bemerkung 65.* Wenn wir also den Postnikov-Turm haben und die Abbildungen  $X \rightarrow X_n$  vergessen, so können wir  $X$  bis auf schwache Homotopieäquivalenz zurückgewinnen durch CW-Approximation des inversen Limes (siehe auch Satz 48). ☞ Vortrag

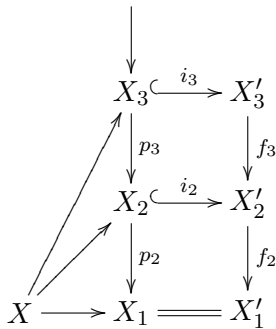
Welche Information brauchen wir nun, um aus  $K(\pi_1 X, 1)$  induktiv den Postnikov-Turm von  $X$  aufzubauen? Nur die Homotopiegruppen reichen nicht aus, denn der Raum  $\prod_{n \in \mathbb{N}} K(\pi_n(X), n)$  hat zwar die gleichen Homotopiegruppen wie  $X$ , ist aber i.A. nicht einmal schwach äquivalent und hat möglicherweise völlig andere Homologiegruppen. Es steckt also zusätzliche Information in den Abbildungen  $X \rightarrow X_n$  und  $X_n \rightarrow X_{n-1}$ , die uns sagen, wie man die  $K(\pi_n(X), n)$  zu einem Postnikov-Turm zusammensetzen muss, um im Limes einen zu  $X$  homotopieäquivalenten Raum zu erhalten.

**Lemma 66.** Gegeben ein Postnikov-Turm  $\{p_n : X_{n+1} \rightarrow X_n \mid n \geq 1\}$  für einen Raum  $X$ , so erhält man einen Postnikov-Turm  $\{f_n : X'_{n+1} \rightarrow X'_n \mid n \geq 1\}$  für  $X$ , der aus Faserungen besteht und dessen Elemente  $X'_n$  homotopieäquivalent sind zu den Elementen  $X_n$  des gegebenen Turms. Ausserdem sind die Homotopiefasern  $F_n$  von  $p_n$  (das sind die Fasern von  $f_n$ ) Eilenberg-MacLane-Räume  $K(\pi_n(X), n)$ . ☞ Vortrag

*Beweis.* Die Abbildung  $X_n \xrightarrow{p_n} X_{n-1}$  faktorisiert über  $E_{p_n}$  in eine Homotopieäquivalenz, gefolgt von einer Faserung:

$$X_n \hookrightarrow E_{p_n} \rightarrow X_{n-1}$$

Definiere also  $X'_1 := X_1$  und induktiv:



wobei  $i$  für Inklusion steht und  $X'_n$  der Wegerraum  $E$  zur Abbildung  $i_n \circ p_{n+1}$  ist.

Die Faser  $F_n$  von  $f_n$  ist ein  $K(\pi_n(X), n)$ , denn wir haben für die Faserung  $f_n$  eine lange exakte Sequenz:

$$\cdots \xrightarrow{i_*} \pi_{i+1}(X'_n) \xrightarrow{f_{n*}} \pi_{i+1}(X'_{n-1}) \xrightarrow{\partial} \pi_i(F_n) \xrightarrow{i_*} \pi_i(X'_n) \xrightarrow{f_{n*}} \pi_i(X'_{n-1}) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

wobei für  $i = n$  nach Definition eines Postnikov-Turms  $\pi_{n+1}(X'_{n-1}) = 0$  und  $\pi_n(X'_{n-1}) = 0$ , also  $i_*$  ein Isomorphismus ist. Für  $i \leq n-1$  ist  $\pi_i(X'_n) \simeq \pi_i(X)$  und  $\pi_i(X'_{n-1}) \simeq \pi_i(X)$ , also  $f_{i*}$  ein Isomorphismus. Für  $i < n-1$  ist also  $\pi_i(F_n) = 0$ . Da  $\pi_n(X_{n-1}) = 0$ , ist auch  $\pi_{n-1}(F_n) = 0$ .  $\square$

*Bemerkung 67.* Die Faserungen  $F \rightarrow E \rightarrow B$  in einem Postnikov-Turm aus Faserungen sind also

$$\begin{array}{ccc}
 K(\pi_n(X), n) & \xrightarrow{i_n} & X_n \\
 & & \downarrow f_n \\
 & & X_{n-1}
 \end{array}$$

Jetzt wäre es praktisch, wenn wir das nach rechts fortsetzen könnten mit einer Faserung  $k_{n-1} : X_{n-1} \rightarrow B'$ , dessen Homotopiefaser gerade  $X_n$  ist. Dann könnten wir nämlich allein aus der Abbildung  $k_{n-1}$  den Raum  $X_n$  zurückgewinnen. Erinnern wir uns an die Definition einer prinzipalen Faserung (Def. 17)!

## 2.2 Postnikov-Türme aus prinzipalen Faserungen

**Lemma 68.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Wenn alle Faserungen in einem Postnikov-Turm von  $X$  prinzipal sind, so haben wir ein Diagramm

⊗ Vortrag

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \\
 K(\pi_3(X), 3) & \xrightarrow{i_3} & X_3 & \xrightarrow{k_3} & K(\pi_4(X), 5) \\
 & & \downarrow f_3 & & \\
 K(\pi_2(X), 2) & \xrightarrow{i_2} & X_2 & \xrightarrow{k_2} & K(\pi_3(X), 4) \\
 & & \downarrow f_2 & & \\
 K(\pi_1(X), 1) & \xlongequal{\quad} & X_1 & \xrightarrow{k_1} & K(\pi_2(X), 3)
 \end{array}$$

in dem jedes  $X_{n+1}$  bis auf schwache Homotopieäquivalenz die Homotopiefaser der Abbildung  $k_n : X_n \rightarrow K(\pi_{n+1}(X), n+2)$  ist. Die Abbildung  $k_n$  ist nach Satz 33 äquivalent zu einer Klasse in  $H^{n+2}(X_n; \pi_{n+1}(X))$ , die man  $n$ -te  $k$ -Invariante von  $X$  nennt. Der Homotopietyp von  $X_3$  hängt nur von der Homotopieklasse von  $k_2$  ab.

*Beweis.* Wenn die Faserung  $f_2$  prinzipal mit Faser  $K(\pi_2(X), 2)$  ist, so haben wir ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 K(\pi_2(X), 2) & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & X_1 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \Omega B' & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & B'
 \end{array}$$

es ist  $\Omega B'$  ein  $K(\pi_2(X), 2)$ , also muss  $B'$  ein  $K(\pi_2(X), 3)$  sein. Die Räume  $F', E'$  vergessen wir wieder, wir erhalten eine Fasersequenz bis auf Homotopie:

$$\begin{array}{ccc}
 K(\pi_2(X), 2) & \xrightarrow{i_2} & X_2 \\
 & & \downarrow f_2 \\
 K(\pi_1(X), 1) & \xlongequal{\quad} & X_1 \xrightarrow{k_1} K(\pi_2(X), 3)
 \end{array}$$

Da die Abbildungen  $f_n$  alle prinzipal sind, erhalten wir das Diagramm wie behauptet.

Der Homotopietyp von  $X_n$  hängt nur von der Homotopieklasse von  $k_{n-1}$  ab, denn  $X_n$  ist die Homotopiefaser von  $k_{n-1}$ , und die ist der Pullback der Wegefaserung  $PK(\pi_{n-2}, n-3) \rightarrow K(\pi_{n-2}, n-3)$  entlang  $k_{n-1}$ :

$$\begin{array}{ccc}
 X_n & \longrightarrow & PK_{n-1} \\
 f_n \downarrow & & \downarrow \\
 X_{n-1} & \xrightarrow[k_{n-1}]{} & K(\pi_{n-2}, n-3)
 \end{array}$$

(wobei  $PX = \{(e, \gamma) \in X \times X^I \mid \gamma(0) = e\}$ ), und Pullbacks von Faserungen unter zwei zueinander homotopen Abbildungen sind faserhomotopieäquivalente Faserungen (nach Lemma 12).  $\square$

*Bemerkung 69.* Diese Klassen  $k_n$  spezifizieren, wie man  $X$  induktiv aus Eilenberg-MacLane-Räumen konstruieren kann. Sind alle  $k_n$ 's schon 0, so ist  $X$  Produkt der  $K(\pi_n(X), n)$ , ansonsten ein "verdrehtes" Produkt.

*Beweis.* Wenn  $k_n = 0 \in H^{n+2}(X_n; \pi_{n+1}(X))$ , also  $k_n : X_n \rightarrow K(\pi_{n+1}(X), n)$  nullhomotop, so ist die Homotopiefaser von  $k_n$  genau  $k_n^*p$  mit  $p : PK(\pi_{n+1}(X), n) \rightarrow K(\pi_{n+1}(X), n)$ , allerdings ist das genau  $\Omega K(\pi_{n+1}(X), n)$ , da  $k_n$  nullhomotop (siehe auch Lemma 12).  $\square$

**Satz 70.** *Sei  $X$  ein zusammenhängender CW-Komplex. Dann hat  $X$  einen Postnikov-Turm aus prinzipalen Faserungen genau dann, wenn  $\pi_1(X)$  trivial auf  $\pi_n(X)$  operiert für alle  $n \geq 2$ .*

$\textcircled{e}$  Vortrag

$\textcircled{e}$  [H] 4.69

*Bemerkung 71.* Wenn  $X$  einen prinzipalen Postnikov-Turm hätte, so wäre der Homotopietyp der Fasern der  $f_n$  ein Schleifenraum - das ist eine sehr starke Restriktion an eine Faserung, aber bei Postnikov-Türmen ist das stets der Fall, wie wir gesehen haben.

Für eine Faserung  $i : A \rightarrow X$  kann man ohne Einschränkungen durch CW-Approximation (siehe Satz 48) und Übergang zum Abbildungskegel annehmen, dass  $(X, A)$  ein CW-Paar ist und  $f$  die Inklusion. Wenn wir nun ein CW-Paar  $(E, F)$  finden, das Teil einer Faserung  $F \rightarrow E \rightarrow B$  ist und ausserdem eine Abbildung  $w : (X, A) \rightarrow (E, F)$ , die schwache Äquivalenzen  $X \rightarrow E$  und  $A \rightarrow F$  induziert, so erhalten wir aus den langen exakten Homotopiesequenzen zur Faserung  $F \rightarrow E \rightarrow B$  sowie der Abbildung  $w$  eine Abbildung  $w|_{F_i}$ , die schwache Homotopieäquivalenz  $F_i \rightarrow \Omega B$  ist (Homotopiesequenzen hinschreiben!). Also ist dann schon  $i$  eine prinzipale Faserung.

Wir suchen also für eine Faserung  $i : A \rightarrow X$  so ein Faserungspaar  $(E, F)$  und eine solche Abbildung  $w : (X, A) \rightarrow (E, F)$ . Wann gibt es so eine Faserung?

**Lemma 72.** *Sei  $(X, A)$  ein CW-Paar mit  $X$  und  $A$  zusammenhängend, sodass die Homotopiefaser der Inklusion  $A \hookrightarrow X$  ein  $K(\pi, n)$ ,  $n \geq 1$  ist. Dann existiert eine Faserung  $F \rightarrow E \rightarrow B$  und eine Abbildung  $(X, A) \rightarrow (E, F)$ , die schwache Homotopieäquivalenzen  $X \rightarrow E$  und  $A \rightarrow F$  induziert genau dann, wenn die Aktion von  $\pi_1(A)$  auf  $\pi_{n+1}(X, A)$  trivial ist.*

$\textcircled{e}$  Vortrag

$\textcircled{e}$  [H] 4.70

*Beweis.* Zunächst mal kann man sich jede Faserung  $A \rightarrow X$  als Inklusion eines CW-Komplexes in einen CW-Komplex denken, denn via CW-Approximation und dann Abbildungskegel des Resultats haben wir genau diese Situation.

Angenommen, wir hätten eine Faserung  $F \rightarrow E \rightarrow B$  und eine Abbildung  $(X, A) \rightarrow (E, F)$ , die entsprechende schwache Äquivalenzen induziert. Dann muss die Homotopiefaser von  $A \rightarrow X$  ein Schleifenraum sein, was bei  $K(\pi, n)$  der Fall ist. Ausserdem muss die Aktion von  $\pi_1(A)$  auf  $\pi_n(X, A)$  trivial sein, denn das ist äquivalent zur Aktion von  $\pi_1(F)$  auf  $\pi_n(E, F)$  und da  $p_* : \pi_n(E, F) \rightarrow \pi_n(B, x_0)$  Iso ist, ist das die Aktion von  $\pi_1(F)$  auf  $\pi_n(B)$  und die ist trivial, denn für  $\gamma \in \pi_1(F)$  und  $\alpha \in \pi_n(E, F)$  ist  $p_*(\gamma)p_*(\alpha) - p_*(\alpha) = 0$ , denn  $p_*(\gamma) \in \pi_1(x_0)$ .

Also ist die Bedingung wohl notwendig. Sie ist aber auch hinreichend: Wir wissen, dass

$$\pi_i(X, A) = \begin{cases} \pi, & i = n + 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \text{ denn } \pi_i(X, A) \simeq \pi_{i-1}(F) \text{ und } F \text{ ist ein } K(\pi, n). \text{ Da die Ak-}$$

tion von  $\pi_1(A)$  auf  $\pi_{n+1}(X, A)$  trivial ist, liefert der relative Satz von Hurewicz (Satz 56) einen Isomorphismus  $h_{n+1} : \pi_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\sim} H_{n+1}(X, A)$ . Da  $(X, A)$   $n$ -zusammenhängend ist, können wir annehmen, dass das  $n$ -Skelett von  $X$  in  $A$  liegt, also ist  $X/A$  auch  $n$ -zusammenhängend und der absolute Satz von Hurewicz (Satz 56) liefert einen Isomorphismus  $h_{n+1}\pi_{n+1}(X/A) \xrightarrow{\sim} H_{n+1}(X/A)$ . Auf Homologie induziert die Quotientenabbildung  $X \rightarrow X/A$

einen Isomorphismus  $H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\sim} H_{n+1}(X/A)$ , also haben wir auch auf Homotopie einen Isomorphismus  $\pi_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\sim} \pi_{n+1}(X/A)$ .

Da  $\pi_{n+1}(X/A) = \pi$ , können wir  $K(\pi, n+1)$  aus  $X/A$  konstruieren, indem wir Zellen von Dimensionen  $n+3$  und größer ankleben. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\text{proj}} & X/A \\
 \downarrow & & \downarrow \wr & \searrow k & \downarrow i \\
 F_k & \longrightarrow & E_k & \longrightarrow & K(\pi, n+1)
 \end{array}$$

in dem die vertikalen Abbildungen Inklusionen sind,  $k$  die Komposition des oberen rechten Dreiecks und die untere Zeile die Abbildung  $k : X \rightarrow K(\pi, n+1)$  in eine Faserung  $E_k \rightarrow K(\pi, n+1)$  mit Homotopiefaser  $F_k$  zerlegt.

Die Abbildung  $A \rightarrow F_k$  ist eine schwache Homotopieäquivalenz nach dem Fünferlemma auf Homotopiesequenzen der Paare  $(X, A)$  bzw.  $(E_k, F_k)$ .  $\square$

*Beweis.* [von Satz 70] Wir müssen noch zeigen: Wenn  $\pi_1(X)$  trivial auf  $\pi_n(X)$  operiert für alle  $n \geq 2$ , so ist die Aktion von  $\pi_1(X_n)$  auf  $\pi_{n+1}(X_{n-1}, X_n)$  trivial für alle  $n \geq 2$ . Denn dann gibt es mit dem Lemma schließlich eine prinzipale Faserung  $X_i \rightarrow X_{i-1}$  und wir können induktiv einen Turm daraus bauen. Dabei betrachten wir die Abbildungen  $X_n \rightarrow X_{n-1}$  als Inklusionen (z.B. über Abbildungszylinder).

Betrachten wir die lange exakte Sequenz des Paares  $(X_{n-1}, X_n)$ :

$$0 = \pi_{n+1}(X_{n-1}, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_{n+1}(X_{n-1}, X_n) \xrightarrow{\partial} \pi_n(X_n) \xrightarrow{p_*} \pi_n(X_{n-1}) = 0$$

so sehen wir, dass  $\partial : \pi_{n+1} \rightarrow \pi_n$  ein Isomorphismus ist, der mit der Operation von  $\pi_1(X_n)$  verträglich ist (denn  $\partial$  ist funktoriell). Die Abbildung  $X \rightarrow X_n$  aus dem Postnikov-Turm induziert Isomorphismen auf  $\pi_1$  und  $\pi_n$ , also ist die Aktion von  $\pi_1(X_n)$  auf  $\pi_n(X_{n-1}, X_n)$  trivial.  $\square$

### 2.3 Moore-Postnikov-Türme aus prinzipalen Faserungen

Moore-Postnikov-Türme sind nicht Teil des Vortrags.

**Definition 73.** Seien  $X, Y$  wegzusammenhängende topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Ein **Moore-Postnikov-Turm** für  $f$  ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & Z_3 & & \\
 & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & Z_2 & & \\
 X & \nearrow & \downarrow & \searrow & Y \\
 X & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & Y
 \end{array}$$

wobei jede Komposition  $X \rightarrow Z_n \rightarrow Y$  homotop zu  $f$  ist und

1.  $X \rightarrow Z_n$  auf  $\pi_i$  einen Iso für  $i < n$  und einen Epi für  $i = n$  induziert,



2.  $Z_n \rightarrow Y$  auf  $\pi_i$  einen Iso für  $i > n$  und einen Mono für  $i = n$  induziert,
3.  $Z_{n+1} \rightarrow Z_n$  eine Faserung mit Faser  $K(\pi_n(F), n)$  ist, wobei  $F$  Homotopiefaser von  $f$  ist.

*Bemerkung 74.* Wenn der Raum  $Y = \text{pt}$  gewählt wird, ist  $f : X \rightarrow Y$  konstant und der korrespondierende Moore-Postnikov-Turm ist ein Postnikov-Turm für  $X$  mit  $X_n := Z_{n+1}$ .

**Satz 75.** *Seien  $X, Y$  zusammenhängende CW-Komplexe. Dann hat jede Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  einen Moore-Postnikov-Turm, eindeutig bis auf Homotopieäquivalenz.*

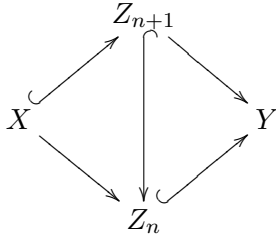
© [H] 4.71

*Ein Moore-Postnikov-Turm aus prinzipalen Faserungen existiert genau dann, wenn  $\pi_1(X)$  trivial auf  $\pi_n(M_f, X)$  operiert für alle  $n \geq 2$ .*

*Beweis.* Einen Turm, der die Bedingungen 1 und 2 erfüllt und wenigstens auf Homotopie kommutiert, erhalten wir durch CW-Modelle für das Paar  $(M_f, X)$ , wobei  $M_f$  der Abbildungszyylinder von  $f$  ist (siehe auch Satz 48).

Mit so einem Diagramm verfahren wir so wie zuvor und ersetzen die Abbildungen  $Z_n \rightarrow Z_{n-1}$  durch homotope Faserungen. Über die Homotopieliftungseigenschaft (Def. 1) können wir erreichen, dass alle Dreiecke in der linken Hälfte des Turms echt kommutieren (nicht nur auf Homotopie). Damit die rechte Seite auch echt kommutiert, ersetzen wir alle Abbildungen nach  $Y$  durch die Komposition, die durch  $Z_1$  geht.

Wir arbeiten nun an Bedingung 3, dass die Faser von  $Z_{n+1} \rightarrow Z_n$  ein Eilenberg-MacLane-Raum ist. Betrachte die Abbildungskette  $X \rightarrow Z_{n+1} \rightarrow Z_n \rightarrow Y$ . Wir wandeln diese in eine Inklusion um, indem wir erst aus  $X \rightarrow Z_{n+1}$  via Abbildungszyylinder eine Inklusion machen, dann aus dem resultierenden  $Z_{n+1} \rightarrow Z_n$  usw., das liefert ein Diagramm:



Am linken Dreieck sehen wir, dass  $Z_{n+1} \rightarrow Z_n$  für  $i < n$  auf  $\pi_i$  Iso ist und für  $i = n$  wenigstens surjektiv. Also ist  $\pi_i(Z_n, Z_{n+1}) = 0$  für  $i < n+1$ . Das rechte Dreieck liefert analog  $\pi_i(Z_n, Z_{n+1}) = 0$  für  $i > n+1$ . Nun fehlt noch  $\pi_{n+1}(Z_n, Z_{n+1}) \xrightarrow{\simeq} \pi_{n+1}(Y, X)$ . Dazu betrachte das Diagramm:


$$\begin{array}{ccccccccc}
 \pi_{n+1}(Z_{n+1}) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(Z_n) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(Z_n, Z_{n+1}) & \longrightarrow & \pi_n(Z_{n+1}) & \longrightarrow & \pi_n(Z_n) \\
 \downarrow = & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow \\
 \pi_{n+1}(Z_{n+1}) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(Y) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(Y, Z_{n+1}) & \longrightarrow & \pi_n(Z_{n+1}) & \longrightarrow & \pi_n(Y) \\
 \uparrow & & \uparrow = & & \uparrow & & \uparrow \wr & & \uparrow = \\
 \pi_{n+1}(X) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(Y) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(Y, X) & \longrightarrow & \pi_n(X) & \longrightarrow & \pi_n(Y) \\
 & & & & \uparrow \wr & & & & \\
 & & & & \pi_n(F_f) & & & & 
 \end{array}$$

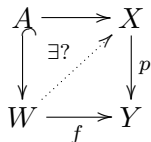
Die obere rechte vertikale Abbildung ist injektiv, die untere linke vertikale Abbildung ist surjektiv, mit zweimaligem Fünferlemma sind die mittleren Vertikalen also Isos. Da die Homotopiefaser  $F_i$  einer Inklusion  $\iota : A \hookrightarrow B$  Homotopiegruppen  $\pi_i(F_i) \simeq \pi_{i+1}(B, A)$  hat, ist Bedingung 3 erfüllt.

Fehlt noch, dass es einen Moore-Postnikov-Turm aus prinzipalen Faserungen gibt. Sei also die Operation von  $\pi_1(X)$  auf  $\pi_n(M_f, X)$  trivial für alle  $n \geq 2$ . Dann ist die Aktion von  $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Z_{n+1})$  auf  $\pi_{n+1}(Y, X) \simeq \pi_{n+1}(Z_n, Z_{n+1})$  trivial, also liefert das Lemma 72 die Aussage per Induktion.  $\square$

### 3 Lifting- und Erweiterungs-Problem

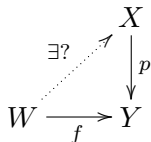
*Bemerkung 76.* Sei  $(W, A)$  ein CW-Paar,  $p : X \rightarrow Y$  eine Faserung,  $f : W \rightarrow Y$  eine Abbildung. Frage: Existiert zu einem gegebenen Lift  $A \rightarrow X$  von  $f$  ein Lift  $W \rightarrow X$ , der diesen erweitert?

 Vortrag

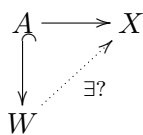


Man nennt dies das **relative Lifting-Problem**.

Wenn  $A = \emptyset$ , ist das relative das absolute Lifting Problem:




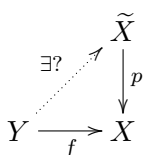
Wenn  $Y = \text{pt}$ , ist das relative Lifting Problem das Erweiterungsproblem:



wobei  $Y$  aus dem Diagramm entfernt wurde, da  $f$  und  $p$  nur konstante Abbildungen sind.

*Bemerkung 77.* In der Überlagerungstheorie lernt man: Ist  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung, so gibt es einen Lift im Diagramm

 Vortrag




genau dann, wenn das Bild von  $f_*$  im Bild von  $p_*$  liegt.

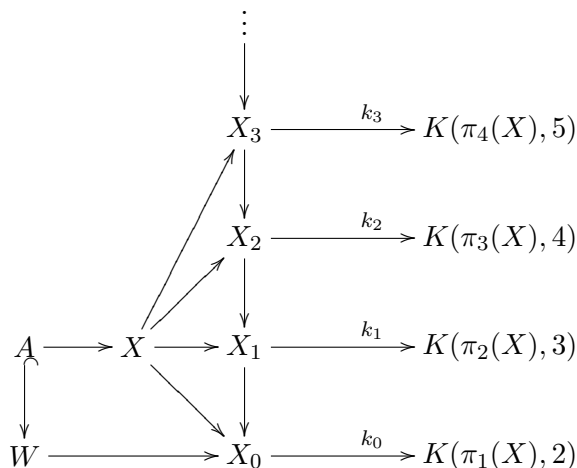
Wir wollen nun die Bedingungen an  $p$  abschwächen und trotzdem noch eine “genau dann wenn”-Bedingung haben. Wir werden dazu bestimmte Kohomologieklassen konstruieren, die verhindern, dass man einen Lift oder eine Erweiterung findet. Wenn die entsprechende Kohomologie verschwindet, kann man also stets liften bzw. erweitern.

#### 3.1 Hindernistheorie

*Bemerkung 78.* Angenommen, wir haben nun eine Abbildung  $A \rightarrow X$ , einen Oberkomplex  $W$  von  $A$  und wollen nun die Abbildung erweitern. Angenommen,  $X$  hat einen prinzipalen

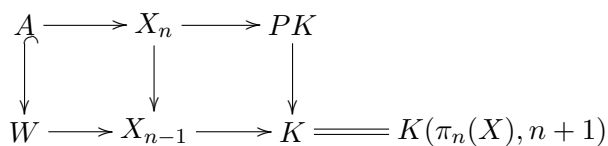
 Vortrag

Postnikov-Turm. Den erweitern wir nach unten durch  $X_0 := \text{pt}$ . Die Abbildung  $X_1 \rightarrow X_0$  ist dann eine Faserung und auch eine prinzipale, wenn  $X_1 = K(\pi_1(X), 1)$  der Schleifenraum von  $K(\pi_1(X), 2)$  ist, also wenn  $\pi_1(X)$  abelsch ist und trivial auf allen höheren Homotopiegruppen operiert (man sagt dann,  $X$  ist **einfach**). Wir haben also ein Diagramm:



Wir werden die konstante Abbildung  $W \rightarrow X_0$  induktiv liften zu Abbildungen  $W \rightarrow X_n$ , die die gegebenen Abbildungen  $A \rightarrow X_n$  erweitern. Wenn wir alle diese Lifts haben, so auch den Lift zu  $W \rightarrow X$  via Limes.

Im Induktionsschritt haben wir ein kommutatives Diagramm:



Da  $X_n$  Pullback von  $PK \rightarrow K$  entlang  $k_{n-1}$  ist, sind die Punkte von  $X_n$  Paare, bestehend aus einem Punkt in  $X_{n-1}$  und einem Weg von seinem Bild in  $K$  zum Basispunkt. Ein Lift  $W \rightarrow X_n$  ist also eine Nullhomotopie der Komposition  $W \rightarrow X_{n-1} \rightarrow K$ . So einen Lift auf  $A$  haben wir bereits, also eine Nullhomotopie  $A \rightarrow K$ , die wir ausdehnen möchten.

Die Abbildung  $W \rightarrow K$  zusammen mit der Nullhomotopie  $A \rightarrow K$  liefert eine Abbildung  $W \cup CA \rightarrow K$ .

**Definition 79.** Die Abbildung  $W \cup CA \rightarrow K$  aus vorangegangener Bemerkung definiert eine Kohomologieklass  $\omega_n \in H^{n+1}(W \cup CA; \pi_n(X)) \simeq H^{n+1}(W, A; \pi_n(X))$ , die **Hindernisklasse**.

☞ Vortrag

**Lemma 80.** Sei  $(W, A)$  ein  $CW$ -Paar und  $X$  ein topologischer Raum mit einem prinzipalen Postnikov-Turm  $\{X_{n+1} \rightarrow X_n \mid n \geq 1\}$ . Dann existiert ein Lift  $W \rightarrow X_n$ , der eine gegebene Abbildung  $A \rightarrow X_n$  erweitert, genau dann wenn  $\omega_n = 0$ .

☞ Vortrag

☞ [H] 4.72

*Beweis.* Wir wollen die eben gefundene Abbildung  $W \cup CA \rightarrow K$  ausdehnen können auf  $CW \rightarrow K$ , genau dann wenn  $\omega_n = 0$ , d.h. genau dann wenn  $W \cup CA \rightarrow K$  nullhomotop ist.

Angenommen  $g_t : W \cup CA \rightarrow K$  wäre eine Nullhomotopie. Die konstante Abbildung  $g_1$  liesse sich konstant erweitern auf  $g_1 : CW \rightarrow K$  und mit der Homotopieerweiterungseigenschaft für das Paar  $(CW, W \cup CA)$ , angewandt auf die umgekehrt durchlaufene Homotopie  $g_{1-t}$ , haben wir eine Homotopie  $g_t : CW \rightarrow K$ , die die vorgegebene Homotopie erweitert. Die Abbildung  $g_0 : CW \rightarrow K$  erweitert dann die gegebene Abbildung auf  $W \cup CA \rightarrow K$  wie gewünscht.

Wenn wir also so eine Erweiterung  $CW \rightarrow K$  haben, dann ist diese nullhomotop, denn  $CW$  ist kontrahierbar und wir können so eine Nullhomotopie auf  $W \cup CA$  einschränken.  $\square$

*Bemerkung 81.* Wenn wir die Lifts  $A \rightarrow X_n$  erweitern können zu Lifts  $W \rightarrow X_n$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so bekommen wir zu der Abbildung  $A \rightarrow X \rightarrow \varprojlim_n X_n$  eine Erweiterung  $W \rightarrow \varprojlim_n X_n$ . Sei  $M$  der Abbildungszylinder von  $X \rightarrow \varprojlim_n X_n$ . Da die Einschränkung von  $W \rightarrow \varprojlim_n X_n \subset M$  auf  $A$  über  $X$  faktorisiert, haben wir eine Homotopie der Restriktion zur Abbildung  $A \rightarrow X \subset M$ . Erweitern wir das zu einer Homotopie von  $W \rightarrow M$  bekommen wir eine Abbildung  $(W, A) \rightarrow (M, X)$ . Da die Abbildung  $X \rightarrow \varprojlim_n X_n$  eine schwache Homotopieäquivalenz ist, ist  $\pi_i(M, X) = 0$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  und nach dem Kompressionslemma (Lemma 38) kann diese Abbildung  $(W, A) \rightarrow (M, X)$  homotopiert werden auf eine Abbildung  $W \rightarrow X$ , die  $A \rightarrow X$  erweitert - was das Erweiterungsproblem löst.

Wenn also bei der induktiven Konstruktion von  $W \rightarrow X_n$  stets  $\omega_n = 0$  ist, hat das Erweiterungsproblem eine Lösung. Leichter anwendbar ist aber das folgende Korollar.

*Bemerkung 82.* Ein Raum  $X$  heißt  $n$ -einfach, wenn  $\pi_1(X)$  trivial auf  $\pi_i(X)$  für  $i \leq n$  operiert. Er heißt **einfach** oder auch abelsch, wenn er  $n$ -einfach für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist.

**Korollar 83.** Wenn  $X$  ein zusammenhängender einfacher CW-Komplex und  $(W, A)$  ein CW-Paar ist, sodass  $H^{n+1}(W, A; \pi_n(X)) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann lässt sich jede Abbildung  $A \rightarrow X$  erweitern auf  $W$ .  $\square$

📖 Vortrag

**Satz 84** (Whitehead!). Seien  $X, Y$  zusammenhängende einfache CW-Komplexe. Dann ist eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$ , die Isomorphismen auf allen Homologiegruppen induziert, eine Homotopieäquivalenz.

📖 [H] 4.74

📖 Vortrag

*Beweis.* Ohne Einschränkungen ist  $X \rightarrow Y$  eine Inklusion eines Unterkomplexes (via Abbildungszylinder). Wenn  $\pi_1(X)$  trivial auf  $\pi_n(Y)$  operiert für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann folgt mit dem relativen Hurewicz  $\pi_n(Y, X) = 0$  für alle  $n$ , da ja nach Voraussetzung  $H_n(Y, X) = 0$  für alle  $n$  gilt (lange exakte Sequenzen hinzeichnen!). Es folgt aus den Voraussetzungen, dass  $\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$  Iso ist, also ist immerhin  $\pi_1(Y, X) = 0$ .

Mit Hindernistheorie erweitern wir die Identität  $\text{id}_X : X \rightarrow X$  zu einer Retraktion  $Y \rightarrow X$ , das geht zum einen, weil  $\pi_1(X)$  trivial auf  $\pi_n(X)$  operiert und zum anderen, weil es keine Hindernisse gibt: Da die Inklusion  $X \hookrightarrow Y$  Isos auf Homologie induziert ist  $H_*(Y, X) = 0$ , also nach dem universellen Koeffiziententheorem (Satz 31) auch  $H^{n+1}(Y, X, \pi_n(X)) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Also gibt es keine Hindernisse bzw. alle  $\omega_n$  verschwinden und die Retraktion  $Y \rightarrow X$  existiert. Damit sind die Abbildung  $\pi_n(Y) \rightarrow \pi_n(Y, X)$  surjektiv und die triviale Aktion von  $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$  auf  $\pi_n(Y)$  impliziert die Trivialität der Aktion von  $\pi_1(X)$  auf  $\pi_n(Y, X)$ .  $\square$

## Quellen

[Hat] HATCHER: *Algebraic Topology*

[May] MAY: *A Concise Course in Algebraic Topology*