3.3. Komplexe Bott-Periodizität

Konrad Voelkel

10. Juni 2010

Erinnerung: Für einen Raum X mit Basispunkt $x_0 \in X$ ist die reduzierte K-Theorie als $\widetilde{K}^0(X) := \mathrm{Ker}(\mathrm{rank})$ definiert, wobei $\mathrm{rank} = \iota^* : K(X) \to K(\{x_0\})$ spaltet, also $\widetilde{K}^0(X) \oplus \mathbb{Z} \simeq K(X)$ (dabei ist ι die Inklusion des Basispunkts von X und $K(\mathsf{pt}) = \mathbb{Z}$). Außerdem ist für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert: $K^{-n}(X) := K^0(S^n X)$ und $\widetilde{K}^{-n}(X) := \widetilde{K}^0(S^n X)$, wobei $S^n X$ die n-fach iterierte reduzierte Suspension $SX := S^1 \wedge X$ bezeichnet.

Inhalt: Sei X im ganzen Vortrag ein kompakter Hausdorffraum. Wir wollen Bott-Periodizität der topologischen K-Theorie beweisen, also $\widetilde{K}^0(X) \simeq \widetilde{K}^0(S^2 X)$. Dazu definieren wir auf der reduzierten und unreduzierten K-Theorie ein äußeres Produkt (analog dem Kreuzprodukt der Kohomologie) und beweisen, dass das äußere Produkt von einem Bündel über einem kompakten Hausdorffraums X mit dem kanonischen Bündel H über der $S^2 = \mathbb{C}P^1$ ein Ringisomorphismus ist, als Korollar des **allgemeinen Produktsatzes**.

Den allgemeinen Produktsatz beweist man, indem man eine Inverse zur Bott-Abbildung konstruiert. Dies tut man, indem man einsieht, dass Vektorbündel über $P(L \oplus 1)$ gegeben sind durch zwei Vektorbündel $E^0, E^\infty \to X$ und eine Homotopieklasse von Kuppelfunktionen $f \in \mathrm{Hom}(\pi^* E^0, \pi^* E^\infty)$, wobei $\pi : S \to X$ das Einheitskreisbündel von L ist, welches man durch Wahl einer hermiteschen Metrik auf L gewinnt. Hier gibt es nun verschiedene Möglichkeiten, um geschickt Repräsentanten der Kuppelfunktion zu wählen. Wir werden skizzieren, wie man mit einer Fourierreihe auf Laurent-Kuppelfunktionen kommt, von dort auf polynomiale Kuppelfunktionen für ein getwistetes Bündel und schließlich auf lineare Kuppelfunktionen, die sich mit einem Trick besonders einfach wählen lassen. Für diese Konstruktionen sind einige algebraische Relationen einzusehen, dann können wir eine Inverse angeben und der Produktsatz folgt mit diesen elementaren Techniken.

Um die Inverse zu konstruieren, kann man verschiedene Techniken einsetzen. Der ursprüngliche Beweis von Bott [Bot58] hat mit differentialgeometrischen Methoden (Morse-Theorie) die Kuppelfunktionen untersucht, Atiyah hat in [Ati68] mit Indices von elliptischen Differentialoperatoren gearbeitet und gezeigt, inwiefern wir hier einen Spezialfall davon behandeln (der Artikel ist dann auch in Zusammenhang mit dem Vortrag über den Thom-Isomorphismus interessant). Wir folgen dem "zweiten" Beweis der komplexen Bott-Periodizität [AB64], den Atiyah und Bott ersonnen haben, um mit möglichst elementaren Techniken das Resultat zu bekommen. Der Beweis lässt sich gut bei Atiyah [Ati64, §2.2] und Hatcher [Hat03, §2.2] nachlesen. Mehr über Analoga der Bott-Periodizität in anderen K-Theorien findet man in einem Artikel von Karoubi [Kar05].

Quellen

[AB64] Atiyah, Michael ; Bott, Raoul: On the periodicity theorem for complex vector bundles. In: **Acta Math.** (1964), Nr. 112, 229–247. `www.math.ucdavis.edu/~kaminker/BottPeriodicity2.pdf`

[Ati64] Atiyah, M.F.: **K-Theory**. W.A.Benjamin, Amsterdam, 1964

[Ati68] Atiyah, M.: Bott periodicity and the index of elliptic operators. In: **Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)** (1968), Nr. 19, S. 113–140

[Bot58] Bott, Raoul: The Stable Homotopy of the Classical Groups. In: **Ann. Math.** 70 (1958), Nr. 2, 313–337. `http://www.jstor.org/pss/1970106`

[Hat03] Hatcher, Allen: **Vector Bundles and K-Theory**. draft, 2003. – 115 S. `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html`

[Kar05] Karoubi, Max: Bott periodicity in topological, algebraic and Hermitian K-theory. In: Friedlander, Eric M. (Hrsg.) ; Grayson, Daniel R. (Hrsg.): **Handbook of K-theory** Bd. 1. Springer, 2005, Kapitel 2, S. 111–137

Definition 1. Auf K-Gruppen ist ein **äußeres Produkt** gegeben durch die Pullbacks entlang von Projektionen des Produkts $X \times Y$ auf seine Komponenten:

$$\nu : K^0(X) \otimes K^0(Y) \xrightarrow{(\mathrm{proj}_X)^* \otimes (\mathrm{proj}_Y)^*} K^0(X \times Y) \otimes K^0(X \times Y) \xrightarrow{\text{mult}} K^0(X \times Y).$$

ν ist ein Ringhomomorphismus. Für reduzierte K-Gruppen ist analog mit den Projektionen $\mathrm{proj}_X : X \wedge Y \to X$ bzw. $\mathrm{proj}_Y : X \wedge Y \to Y$ ein äußeres Produkt gegeben:

$$\nu : \widetilde{K}^0(X) \otimes \widetilde{K}^0(Y) \xrightarrow{(\mathrm{proj}_X)^* \otimes (\mathrm{proj}_Y)^*} \widetilde{K}^0(X \wedge Y) \otimes \widetilde{K}^0(X \wedge Y) \xrightarrow{\text{mult}} \widetilde{K}^0(X \wedge Y).$$

Über die spaltende k.e.S. $\widetilde{K}^0 \hookrightarrow K^0 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ hängen die beiden Produkte zusammen (Übung!):

$$\widetilde{\nu} : \widetilde{K}^0(X) \otimes \widetilde{K}^0(Y) \hookrightarrow K^0(X) \otimes K^0(Y) \xrightarrow{\nu} K^0(X \times Y) \twoheadrightarrow \frac{K^0(X \times Y)}{K^0(X \vee Y)} = \widetilde{K}^0(X \wedge Y).$$

Für $Y = S^2$ erhält man die Abbildung

$$\mu : K^0(X) \otimes K^0(S^2) \xrightarrow{\nu_{X \times S^2}} K^0(X \times S^2)$$

Bemerkung. Der Raum $X \times S^2$ lässt sich als Totalraum eines trivialen Bündels über X mit Faser $\mathbb{C}P^1$ auffassen. Wir werden $X \times S^2 \simeq X \times \mathbb{C}P^1$ verallgemeinern auf ein Bündel über X mit Faser $\mathbb{C}P^1$, das nicht notwendig trivial ist (da wir das in der Aussage des allgemeinen Produktsatzes brauchen).

Definition 2 (Projektive Bündel)**.** Von einem komplexen Vektorraum V kann man den projektiven Raum $P(V)$ bilden, das ist $(V \setminus 0)/\mathbb{C}^\times$. Ist L ein eindimensionaler komplexer Vektorraum, so sind V und $V \otimes L$ unkanonisch isomorph, $P(V)$ und $P(V \otimes L)$ hingegen kanonisch.

Dasselbe funktioniert für Vektorbündel, d.h. es gibt zu jedem Vektorbündel $E \to X$ von Rang $2n$ ein assoziiertes projektives Bündel $P(E) \to X$ mit Faser $\mathbb{C}P^{n-1}$.

Für ein Vektorbündel $E \to X$ von Rang n betrachte den Nullschnitt $X \hookrightarrow E,\ x \mapsto 0 \in E_x$, dessen Bild wir X_0 nennen. Die Fasern von $E \setminus X_0$ sind $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, darauf operiert $\mathbb{C}^\times$ und der Quotient ist der $\mathbb{C}P^{n-1}$. So operiert $\mathbb{C}^\times$ auf dem Bündel $E \setminus X_0 \to X$ fasererhaltend und wir nennen das Quotientenbündel $P(E) \to X$ **das zu E assoziierte projektive Bündel**.

Definition 3 (Nullschnitt und ∞-Schnitt)**.** Für alle $x \in X$ lässt sich L_x einbetten in $P(L \oplus 1)_x$ via $y \mapsto (y, 1)$ und diese Einbettung setzt fort auf einen Homöomorphismus von der Einpunkt-Kompaktifizierung von L_x auf $P(L \oplus 1)$. Es lässt sich einbetten $X \hookrightarrow P(L \oplus 1)$, $x \mapsto \infty \in P(L \oplus 1)_x$, analog für 0 statt ∞, man nennt das auch den **∞-Schnitt** bzw. den **Nullschnitt** von $P(L \oplus 1)$.

Definition 4 (Tautologisches Bündel)**.** Sei $E \to X$ ein Vektorbündel von Rang n. Jeder Punkt $a \in P(E)_x = P(E_x) = \mathbb{C}P^n$ repräsentiert einen Strahl in E_x, den wir nun H_a^* nennen. $H^* := \bigcup_{a \in P(E)} H_a^*$ ist nun ein Vektorbündel, genannt **tautologisches Bündel**, nämlich ein Unterbündel des via $P(E) \to X$ zurückgezogenen Bündels $E \to X$. Das duale Bündel $H := H^{**}$ heißt **kanonisches Bündel**. Ist $L \to X$ das triviale Geradenbündels über einem Punkt, so ist $P(L \oplus 1) = S^2$ und das Element $([H] - [1]) \in \widetilde{K}(S^2)$ heißt dann **Bott-Klasse**.

Jetzt können wir den Produktsatz formulieren:

Satz 5. *Sei $L \to X$ ein Geradenbündel. Als $K(X)$-Algebra ist $K(P(L \oplus 1))$ erzeugt von $[H]$ mit der Relation $([H] - [1])([L][H] - [1])$, d.h. der $K(X)$-Algebrenhomomorphismus $K(X)[t] \to K(P(L \oplus 1))$, $t \mapsto [H]$ hat einen von $(t - [1])([L]t - [1])$ erzeugten Kern. Die $K(X)$-Operation kommt hierbei vom Pullback des Bündels $P(L \oplus 1) \to X$.*

Korollar 6. *Mit $X = \mathsf{pt}$ ist $K(\mathsf{pt}) = \mathbb{Z}$ und $L = 1$, also erhält man $K^0(S^2) = \mathbb{Z}[H]/(H - 1)^2$. Insbesondere ist $([H] - [1])$ ein Erzeuger von $\widetilde{K}^0(S^2)$ über $\mathbb{Z}$ und daran sehen wir, dass die (innere) Multiplikation in $\widetilde{K}^0(S^2)$ stets 0 ergibt.*

Korollar 7. *Die Abbildung $K(X)[t]/(t - 1)^2 \to K(X \times S^2)$, $t \mapsto H$ ist ein $K(X)$-Algebrenisomorphismus.*

Verkettet mit $K(X) \otimes K(S^2) \xrightarrow{\sim} K(X) \otimes \mathbb{Z}[t]/(t-1)^2 \xrightarrow{\sim} K(X)[t]/(t-1)^2$ ergibt sich, dass $\mu : K^0(X) \otimes K^0(S^2) \to K^0(X \times S^2)$ ein Ringisomorphismus ist.

Korollar 8 (Bott-Periodizität)**.** *Die **Bott-Abbildung**, also die externe Multiplikation mit der **Bott-Klasse** $\lambda := ([H] - [1]) \in \widetilde{K}^0(S^2)$ ist ein Ringisomorphismus:*

$$\beta : \widetilde{K}^0(X) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \lambda} \widetilde{K}^0(X) \otimes \widetilde{K}^0(S^2) \xrightarrow{\mu} \widetilde{K}^0(X \wedge S^2).$$

Wir wollen uns nun an die Beweisskizze wagen:

Proposition 9 (Kuppelfunktionen für $P(L \oplus 1)$)**.** *Wähle eine Metrik auf L und nenne $S \subset L$ das Einheitskreisbündel, das wir als Teilraum von $P(L \oplus 1)$ auffassen. Die Fasern von S sind homöomorph zu S^1. Die Vektoren der Länge ≤ 1 bilden ein Bündel $P^0 \subset P(L \oplus 1)$, dass den Nullschnitt $X \hookrightarrow P(L \oplus 1)$ enthält. Analog bilden die Vektoren der Länge ≥ 1 zusammen mit dem ∞-Schnitt ein Bündel $P^\infty \subset P(L \oplus 1)$, und der Schnitt ist $P^0 \cap P^\infty = S$. Notiere die Projektionen $\pi : S \to X$, $\pi_0 : P^0 \to X$, $\pi_\infty : P^\infty \to X$. Die Bündel P^0 und P^∞ haben Fasern $D^1 \simeq \mathsf{pt}$ und π_0 bzw. π_∞ sind Deformationsretrakte, d.h. jedes Bündel auf P^0 bzw. P^∞ ist von der Form $\pi_0^*(E^0)$ bzw. $\pi_\infty^*(E^\infty)$ für $E^0, E^\infty \to X$.*

Bündel $E \to P(L \oplus 1)$ lassen sich stets schreiben als $(\pi_0^*(E^0), f, \pi_\infty^*(E^\infty))$ mit $E^0, E^\infty \to X$ und einer Kuppelfunktion $f \in \mathrm{Iso}(\pi^*(E^0), \pi^*(E^\infty))$, die eindeutig ist bis auf Homotopie (nach dem vorigen Vortrag über klassifizierende Räume). Wir notieren so ein Bündel und seine Klasse in $K(P(L \oplus 1))$ mit $E = (E^0, f, E^\infty)$.

Definition 10 (Laurent-Kuppelfunktionen)**.** Wieder mit $\pi : S \to X$ ist $\pi^*(L) = \{(s, l) \in S \times L \mid s, l \text{ in der selben Faser }\}$, also insbesondere $S \times S \hookrightarrow \pi^*(L)$. Die Abbildung

$$z : S \xrightarrow{\Delta} S \times S \hookrightarrow \pi^*(L)$$

ist ein Schnitt des Geradenbündels $\pi^*(L) \to S$. Via Tensorprodukten erhalten wir weitere Geradenbündel $\pi^*(L)^k$ für $k \in \mathbb{Z}$, wobei $\pi^*(L)^{-1}$ das duale Bündel bezeichnet. Die entsprechenden Schnitte bezeichnen wir mit z^k für $k \in \mathbb{Z}$.

Allgemein lässt sich für $E^0, E^\infty \to X$ und $a_k \in \Gamma \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(L^k \otimes E^0, E^\infty)$ der Ausdruck

$$a_k z^k := \pi^*(a_k) \otimes z^k \in \Gamma\pi^*(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(L^k \otimes E^0, E^\infty)) \otimes \Gamma\pi^*(L)^k,$$

also

$$a_k z^k \in \Gamma(\pi^* \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(E^0, E^\infty)) = \Gamma(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\pi^* E^0, \pi^* E^\infty))$$

und schließlich das Laurentpolynom $f_n := \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k \in \Gamma(\pi^*(E^0), \pi^*(E^\infty))$ bilden. Ist $f_n \in \operatorname{Iso}(\pi^*(E^0), \pi^*(E^\infty))$, so nennen wir f_n eine **Laurent-Kuppelfunktion** für (E^0, E^∞).

Übungsaufgabe (Kuppelfunktionen für das kanonische Bündel). Es ist $H^* = (1, z, L)$ und $H^k = (1, z^{-k}, L^{-k})$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 11 (Fourier-Approximation). *Sei $f \in \Gamma \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\pi^* E^0, \pi^* E^\infty)$, dann definiere den **$k$-ten Fourierkoeffizienten** $a_k \in \Gamma \operatorname{Hom}(L^k \otimes E^0, E^\infty)$ durch*

$$a_k(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_{S_x} f_x z_x^{-k-1} \,\mathrm{d}\, z_x,$$

*das ist ein Integral über eine einfach geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$. Definiere für die Partialsummen $s_n := \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$ die **Cesàro-Mittelwerte** $f_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} s_k$. Diese f_n konvergieren gleichmäßig gegen f (das ist im Wesentlichen der Satz von Fejér über sog. $(C,1)$-Summierbarkeit von Fourierreihen oder aber eine explizite Rechnung mit Poissonkernen). Für n groß genug ist f_n eine Laurent-Kuppelfunktion und $(E^0, f, E^\infty) \simeq (E^0, f_n, E^\infty)$.*

Beweis. Wähle Metriken auf E^0, E^∞, dann ist $\operatorname{Hom}(E^0, E^\infty)$ ein topologischer Vektorraum und $\operatorname{Iso}(E^0, E^\infty)$ ein offener Teilraum, der f enthält (offen, da Urbild von $(0, \infty)$ unter der Determinantenabbildung). Es gibt einen ε-Ball um f, der noch ganz in Iso enthalten ist und für große n ist $f_n \in B_\varepsilon(f)$, also eine Laurent-Kuppelfunktion. Innerhalb von $B_\varepsilon(f)$ gibt es eine lineare Homotopie von Kuppelfunktionen von f_n zu f. $\square$

Proposition 12 (Von Laurentpolynomen zu Polynomen). *Ist (E^0, f, E^∞) mit $f = \sum_{k=-n}^{k} a_k z^k$ Laurent-Kuppelfunktion gegeben, so ist $z^n f$ Kuppelfunktion für $(E^0, f, L^n \otimes E^\infty)$.*

Proposition 13 (Transformation auf lineare Kuppelfunktionen). *Sei $p = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ eine polynomiale Kuppelfunktion vom Grad n. Die Matrix*

$$\mathcal{L}^n(p) := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -z & 1 & & & \\ & -z & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -z & 1 \end{pmatrix}$$

liefert einen Homomorphismus, der linear in z ist:

$$\mathcal{L}^n(p) : \pi^* \left(\bigoplus_{k=0}^{n} L^k \otimes E^0 \right) \to \pi^* \left(E^\infty \oplus \bigoplus_{k=0}^{n} L^k \otimes E^0 \right).$$

Definiere induktiv $p_0 := p,\ p_{r+1}(z) := z^{-1}p_r(z) - z^{-1}p_r(0)$, dann gilt die Matrixidentität

$$\mathcal{L}^n(p) = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & \cdots & p_n \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -z & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -z & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. $\mathcal{L}^n(p) = (1+N_1)(p\oplus 1)(1+N_2)$ mit nilpotenten N_1, N_2. Für $t \in [0,1]$ sind die Matrizen $1+tN_i$ nicht singulär, damit lässt sich $\mathcal{L}^n(p)$ linear homotopieren zu $p\oplus 1$ und die beiden Kuppelfunktionen definieren isomorphe Bündel auf $P(L\oplus 1)$. Notiere dieses Bündel $\mathcal{L}^n(E^0, p, E^\infty)$.

Bemerkung. Die Definition von $\mathcal{L}^n(p)$ ist modelliert auf dem Transformieren einer linearen ODE von Ordnung n auf eine Matrix-ODE.

Proposition 14 (Relationen für Transformation auf lineare Kuppelfunktionen)**.** *Sei p polynomiale Kuppelfunktion von Grad $\leq n$ für (E^0, E^∞). Dann gelten*

1. $\mathcal{L}^{n+1}(E^0, p, E^\infty) \simeq \mathcal{L}^n(E^0, p, E^\infty) \oplus (L^{n+1}\otimes E^0, 1, L^{n+1}\otimes E^0)$
2. $\mathcal{L}^{n+1}(L^{-1}\otimes E^0, zp, E^\infty) \simeq \mathcal{L}^n(E^0, p, E^\infty) \oplus (L^{-1}\otimes E^0, z, E^0)$

Beweis. Mit $\mathcal{L}^{n+1}(p) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^n(p) & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \quad -z & 1 \end{pmatrix}$, und der Homotopie $-tz$ von $-z$ nach 0 ist $\mathcal{L}^{n+1}(p)$ homotop zu $\mathcal{L}^n(p)\oplus 1$ und analog wird

$$\mathcal{L}^{n+1}(zp) = \begin{pmatrix} 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ -z & 1 & & & \\ & -z & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -z & 1 \end{pmatrix}$$

homotopiert zu $(-z)\oplus\mathcal{L}^n(p)$, indem die 1 in der zweiten Zeile mit t multipliziert wird. Damit ist $\mathcal{L}^{n+1}(zp) \simeq (-z)\oplus\mathcal{L}^n(p)$. Da -1 auf E^0 fortsetzt ist $(L^{-1}\otimes E^0, -z, E^0) \simeq (L^{-1}\otimes E^0, z, E^0)$. □

Proposition 15 (Relation für polynomiale Kuppelfunktionen)**.** *Für jede polynomiale Kuppelfunktion p für (E^0, E^∞) gilt*

$$\big([(E^0, p, E^\infty) - (E^0, 1, E^0)]\big)([L][H] - [1]) = 0$$

Beweis. Nach den Propositionen 13 und 14 gilt allgemein

$$(L^{-1}\otimes E^0, zp, E^\infty) \oplus (\oplus_{k=0}^n L^k\otimes E^0, 1, \oplus_{k=0}^n L^k\otimes E^0)$$
$$\simeq (E^0, p, E^\infty) \oplus (\oplus_{k=1}^n L^k\otimes E^0, 1, \oplus_{k=1}^n L^k\otimes E^0) \oplus (L^{-1}\otimes E^0, z, E^0),$$

für $n = 0$ gilt in $K(P\oplus 1)$ also:

$$[L^{-1}\otimes E^0, zp, E^\infty] \oplus [E^0, 1, E^0] = [E^0, p, E^\infty] \oplus [L^{-1}\otimes E^0, z, E^0].$$

Aus $[L^{-1}, 1, L^{-1}] = [L^{-1}]$ und $[1, z, L] = [H^{-1}]$ folgt durch Multiplikation

$$[H^{-1}][L^{-1}][E^0, p, E^\infty] = [1, z, L][L^{-1}, 1, L^{-1}][E^0, p, E^\infty] = [L^{-1}\otimes E^0, zp, E^\infty],$$

und zusammen ergibt sich

$$[H^{-1}][L^{-1}][E^0,p,E^\infty] \oplus [E^0,1,E^0] = [E^0,p,E^\infty] \oplus [H^{-1}][L^{-1}][E^0,1,E^0].$$

Durchmultiplizieren mit $[L][H]$ und anschließendes Faktorisieren von

$$[E^0,p,E^\infty] \oplus [L][H][E^0,1,E^0] \ - \ [L][H][E^0,p,E^\infty] \oplus [E^0,1,E^0] = 0$$

ergibt die Aussage. $\square$

Korollar 16 (Relation für H)**.**

$$([H]-1)([L][H]-1) = 0.$$

Beweis. Setze $[E^0,p,E^\infty] = [1,z,L] = [H^{-1}]$, dann ist $[E^0,1,E^0] = [1]$. $\square$

Bemerkung. Jetzt ist klar, dass für $[H]$ die Relation gilt, die im Produktsatz behauptet wird. Es ist noch zu zeigen, dass $[H]$ schon $K(P(L\oplus 1))$ als $K(X)$-Modul erzeugt.

Proposition 17 (Spektralzerlegung von linearen Kuppelfunktionen)**.** *Betrachte $\lambda \in \mathbb{C}$, das ist eine lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \xrightarrow{\cdot\lambda} \mathbb{C}$. Sei $S \subset \mathbb{C}$ ein Kreis, der λ nicht enthält, und B das Innere von S (also alle komplexen Zahlen, deren Norm kleiner ist als die Norm der Elemente von S). dann ist*

$$Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_S (z-\lambda)^{-1}(x)\,\mathrm{d}\,z = \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathbb{C}}, & \lambda \in B \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

Etwas allgemeiner ist für jeden linearen Endomorphismus $T : V \to V$ eines endlichdimensionalen Vektorraums V die Abbildung

$$Q : V \to V,\ v \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_S (z\,\mathrm{Id}_V - T)^{-1}(v)\,\mathrm{d}\,z$$

ein Projektor auf die Summer der Eigenräume von T zu Eigenwerten, die in B liegen. (das Bochner-Integral lässt sich dabei komponentenweise, z.B. auf einer Eigenbasis, auswerten, da die Vektorräume endlichdimensional sind). Damit zerfällt V in $V = QV \oplus (\mathrm{Id}_V - Q)V$ und T zerfällt analog in $T_- \oplus T_+$.

Noch allgemeiner ist für eine lineare Kuppelfunktion p für (E^0,E^∞) ja p ein Schnitt von $\mathrm{Iso}(\pi^*E^0,\pi^*E^\infty)$, lässt sich aber mit dem Fortsetzungssatz von Tietze lokal, und damit insgesamt global erweitern zu einem Schnitt von $\mathrm{Hom}(l^*E^0,l^*E^\infty)$ über L (mit $l : L \to X$). Auf jeder Faser über L ist dieses neue p eine lineare Abbildung $E^0_x \to E^\infty_x$, über S sogar ein Isomorphismus.

Mit den Projektionsoperatoren

$$Q^0_x := \frac{1}{2\pi i}\int_{S_x} p_x^{-1}\,\mathrm{d}\,p_x, \qquad Q^\infty_x := \frac{1}{2\pi i}\int_{S_x} \mathrm{d}\,p_x p_x^{-1}$$

erhalten wir Zerlegungen $E^i = E^i_+ \oplus E^i_-$ durch $E^i_+ := Q^i E^i$ für $i \in \{0,\infty\}$. p zerfällt in $p = p_+ \oplus p_-$ und p_+ ist ein Isomorphismus “ausserhalb S”, d.h. in P^∞ und p_- ist ein Isomorphismus “innerhalb S”, d.h. in P^0.

Beweis. Es genügt, die Aussage punktweise nachzurechnen, also $X = \mathsf{pt}$, $L = \mathbb{C}$ mit der Standardmetrik, $z \in \mathbb{C}$, $p : \mathbb{C} \to \mathrm{Hom}(E^0, E^\infty)$. Da $p(z) \in \mathrm{Iso}(E^0, E^\infty)$ für $|z| = 1$ ist, der Teilraum $\mathrm{Iso} \subset \mathrm{Hom}$ aber offen ist (und der Raum Hom metrisierbar), gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ mit $p(\alpha) \in \mathrm{Iso}(E^0, E^\infty)$. Wir halten so ein α fest und werden E^∞ über diesen Isomorphimus nun mit E^0 identifizieren, um die Rechnung zu vereinfachen. Damit ist also $p(\alpha) = 1 : E^0 \xrightarrow{\sim} E^0$.

Die Abbildung $z \mapsto w(z) := \frac{1-\alpha z}{z-\alpha}$ ist eine konforme Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (eine Möbiustransformation), die den Einheitskreis und sein Inneres invariant lässt. Dazu muss man nur prüfen, dass sie den Rand des Einheitskreises in sich überführt ($|w(z)|^2 = 1$ für $|z| = 1$, Übung!) und den Punkt 0 ins Innere ($w(0) = -\alpha^{-1}$), der Rest ist entweder bekannt oder Übungsaufgabe.

Substituiere in $p(z)$ nun z durch w, d.h. schreibe $p(z) = \frac{w-T}{w+\alpha}$ mit $T \in \mathrm{End}(E^0)$. Dann ist

$$Q^0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} p^{-1} \,\mathrm{d}\, p = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \left(-(w+\alpha)^{-1} \,\mathrm{d}\, w + (w-T)^{-1} \,\mathrm{d}\, w \right)$$

und das ist mit $|\alpha| > 1$ schon gleich $\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} (w-T)^{-1} \,\mathrm{d}\, w$. Analog ist

$$Q^\infty = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} (w-T)^{-1} \,\mathrm{d}\, w \quad (= Q^0),$$

und damit können wir die zuvor angesprochenen Ideen zur Spektralzerlegung anwenden. □

Korollar 18. *Sei p eine lineare Kuppelfunktion für (E^0, E^∞) mit $p = az + b$ und schreibe $p_+ = a_+ z + b_+$ und $p_- = a_- z + b_-$. Wir haben Homotopien von linearen Kuppelfunktionen $p_+(t) := a_+ z + t b_+$, $p_-(t) := t a_- z + b_-$, die p zu $a_+ z \oplus b_-$ homotopieren. Also ist*

$$(E^0, p, E^\infty) \simeq (E^0_+, z, L \otimes E^0_+) \oplus (E^0_-, 1, E^0_-).$$

Beweis. Für $t \in [0, 1]$ sind $p_+(t)$, $p_-(t)$ Isomorphismen auf S, also ist $p(t)$ Homotopie von Kuppelfunktionen, sodass $(E^0, p, E^\infty) \simeq (E^0, p(1), E^\infty) \simeq (E^0_+, a_+ z, E^\infty_+) \oplus (E^0_-, b_-, E^\infty_-)$. Wir haben gesehen, dass $a_+ : L \otimes E^0_+ \to E^\infty_+$ und $b_- : E^0_- \to E^\infty_-$ Isomorphismen sind, also $(E^0_+, a_+ z, E^\infty_+) \simeq (E^0_+, z, L \otimes E^0_+)$ und $(E^0_-, b_-, E^\infty_-) \simeq (E^0_-, 1, E^0_-)$. □

Proposition 19 (Vektorbündel über $P(L \oplus 1)$ sind eindeutig bestimmt durch Bündel über X)**.** *Sei p eine polynomiale Kuppelfunktion vom Grad $\leq n$. Dann ist $\mathcal{L}^n(p)$ eine lineare Kuppelfunktion für (V^0, V^∞) mit*

$$V^0 = \bigoplus_{k=0}^{\infty} L^k \otimes E^0, \qquad V^\infty = E^\infty \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} L^k \otimes E^0.$$

Da $\mathcal{L}^n(p)$ linear ist, können wir $V^0 = V^0_+ \oplus V^0_-$ zerlegen. Dabei ist V^0_+ abhängig von p und n, notiere daher $V_n(E^0, p, E^\infty) := V^0_+$, das ist ein Vektorbündel über X. Seine Klasse in $K(X)$ bestimmt $[E^0, p, E^\infty] \in K(P(L \oplus 1))$ bereits eindeutig.

Beweis. Wenn p_t eine Homotopie polynomialer Kuppelfunktionen ist, so können wir $V_n(E^0, p_t, E^\infty)$ über $X \times I$ bilden und sehen $V_n(E^0, p_0, E^\infty) \simeq V_n(E^0, p_1, E^\infty)$. Aus Proposition 14 erhalten wir

$$V_{n+1}(E^0, p, E^\infty) \simeq V_n(E^0, p, E^\infty) \text{ und } V_{n+1}(L^{-1} \otimes E^0, zp, E^\infty) \simeq V_n(E^0, p, E^\infty) \oplus (L^{-1} \otimes E^0),$$

äquivalent ausgedrückt:

$$V_{n+1}(E^0, zp, L \otimes E^\infty) \simeq L \otimes V_n(E^0, p, E^\infty) \oplus E^0.$$

Mit Korollar 18 und der Tatsache aus Proposition 13, dass $\mathcal{L}^n(p)$ und $p \oplus 1$ isomorphe Bündel definieren, erhalten wir in $K(P(L \oplus 1))$:

$$\begin{aligned}
&[E^0, p, E^\infty] + \left(\sum_{k=1}^{n} [L^k \otimes E^0] \right) [1] \\
&= [V_n(E^0, p, E^\infty)][H^{-1}] + \left(\sum_{k=0}^{n} [L^k \otimes E^0] - [V_n(E^0, p, E^\infty)] \right) [L]
\end{aligned}$$

und somit

$$[E^0, p, E^\infty] = [V_n(E^0, p, E^\infty)] \big([H^{-1}] - [1]\big) + [E^0][1]. \qquad \square$$

Beweis. [Produktsatz] Die Abbildung $K(X)[t] \to K(P(L \oplus 1))$, $t \mapsto [H]$ faktorisiert über $K(X)[t]/((t-1)([L]t-1))$. Wir konstruieren eine Inverse.

Ein Vektorbündel über $P(L \oplus 1)$ ist gegeben durch (E^0, f, E^∞). Wir bilden die Folge der Cesaro-Mittelwerte f_n der Fourierreihe von f und setzen $p_n := z^n f_n$. Für n hinreichend groß ist p_n eine polynomiale Kuppelfunktion vom Grad $\leq 2n$ für $(E^0, L^n \otimes E^\infty)$. Definiere $v_n(f) \in K(X)[t]/((t-1)([L]t-1))$ durch

$$v_n(f) := [V_{2n}(E^0, p_n, L^n \otimes E^\infty)](t^{n-1} - t^n) + [E^0]t^n.$$

Für n groß genug ist die Strecke zwischen p_{n+1} und zp_n eine Homotopie von polynomialen Kuppelfunktionen von Grad $\leq 2(n+1)$. Mit der Formel aus dem Beweis von Proposition 19 gilt dann

$$\begin{aligned}
&V_{2n+2}(E^0, p_{n+1}, L^{n+1} \otimes E^\infty) \simeq V_{2n+2}(E^0, zp_n, L^{n+1} \otimes E^\infty) \\
&\simeq V_{2n+1}(E^0, zp_n, L^{n+1} \otimes E^\infty) \simeq L \otimes V_{2n}(E^0, p_n, L^n \otimes E^\infty) \oplus E^0,
\end{aligned}$$

also $v_{n+1}(f) = ([L][V_{2n}(E^0, p_n, L^n \otimes E^\infty)] + [E^0])(t^n - t^{n+1}) + [E^0]t^{n+1} = v_n(f)$. Also hängt $v_n(f)$ für große n nicht von n ab, notiere dies dann $v(f)$.

Ist g eine weitere Kuppelfunktion, die in $\mathrm{Iso}(\pi^*(E^0), \pi^*(E^\infty))$ nah an f ist, so bildet die Strecke von f_n nach g_n eine Homotopie von polynomialen Kuppelfunktionen von Grad $\leq 2n$, also $v(f) = v(g)$. Damit ist $v(f)$ eine lokal konstante Funktion in f, hängt also nur von der Homotopieklasse von f ab. Setze für ein Bündel $E \to P(L \oplus 1)$ mit Kuppelfunktion f nun $v(E) := v(f)$, das ist wohldefiniert und hängt nur von der Isomorphieklasse von E ab. Man rechnet nach, dass $v(E)$ additiv ist, also ein Gruppenhomomorphismus $v : K(P) \to K(X)[t]/((t-1)([L]t-1))$ ist. Nach Definition ist es auch ein $K(X)$-Modulhomomorphismus.

$\mu v = \mathrm{id}$:

$$\begin{aligned}
\mu v(E) &= \mu \big([V_{2n}(E^0, p_n, L^n \otimes E^\infty)](t^{n-1} - t^n) + [E^0]t^n\big) \\
&= [V_{2n}(E^0, p_n, L^n \otimes E^\infty)]([H]^{n-1} - [H^n]) + [E^0][H]^n \\
&= [E^0, p_n, L^n \otimes E^\infty][H]^n \\
&= [E^0, f_n, E^\infty]
\end{aligned}$$

$v\mu = \mathrm{id}$:
Da $v\mu$ ein $K(X)$-Modulhomomorphismus ist, genügt es, $v\mu(t^n) = t^n$ nachzuweisen für alle $n \geq 0$.

$$\begin{aligned}
v\mu(t^n) &= v(H^n) = v([1, z^{-n}, L^{-n}]) \\
&= [V_{2n}(1,1,1)](t^{n-1} - t^n) + [1]t^n \\
&= t^n,
\end{aligned}$$

da $[V(1,1,1)] = 0$. $\square$