Weil-Deligne Darstellungen und Grothendiecks Monodromiesatz

Konrad Voelkel

14. August 2012

In diesem Vortrag wird die Weilgrupe lokaler und globaler Körper eingeführt, eine Modifikation der Galoisgruppe. Weilgruppen sind "algebraischer" als Galoisgruppen und haben eine größere Darstellungstheorie. Grothendiecks Monodromietheorem erlaubt es uns, Darstellungen der Weilgruppe mit sogenannten Weil-Deligne-Darstellungen zu identifizieren. Diese sind noch besser zu handhaben und machen es möglich, ℓ-adische Darstellungen zu verschiedenen ℓ miteinander zu vergleichen.

In diesem Vortrag bezeichnet stets K einen Körper, k einen Restklassenkörper, mit separablen Hüllen K_s bzw. k_s. Die Zerlegungsgruppe bezeichnen wir mit D (decomposition), die Trägheitsgruppe mit I (inertia).

Wir möchten die absolute Galoisgruppe eines Funktionenkörpers einer projektiven Kurve verstehen, also $K/\mathbb{F}_q(t)$ eine endliche algebraische Erweiterung. Wir verstehen eine (proendliche) Gruppe durch ihre Darstellungen. Dazu stellen wir fest, dass es nach dem Satz von Chebotarev genügt, alle bis auf endlich viele der lokalen Darstellungen zu betrachten. Wir sind daran interessiert, Darstellungen zu verschiedenen ℓ zu vergleichen, also versuchen wir, das Datum einer ℓ-adischen Darstellung so weit umzuformulieren, dass es eine Chance hat, unabhängig von ℓ zu sein. Ein erster Schritt ist, für die Restklassenkörpererweiterung k^s/k die Galoisgruppe $\widehat{\mathbb{Z}}$ durch $\mathbb{Z}$ zu ersetzen, das nennt man dann die Weilgruppe. Diese Vereinfachung überträgt man auf die Galoisgruppe eines lokalen nichtarchimedischen vollständigen Körpers K. Darstellungen der absoluten Weilgruppe von K werden nun weiter umformuliert, um nicht mehr von der ℓ-adischen Topologie auf dem Vektorraum abzuhängen, denn ein Problem ist das a priori unendlich große Bild der Trägheitsgruppe. Dazu zeigt man, dass die wilde Verzweigungsgruppe nach einer endlichen Körpererweiterung trivial operiert und man die Operation der restlichen Galoisgruppe explizit über einen Endomorphismus des Vektorraums beschreiben kann, also einem Datum, welches von ℓ unabhängig ist.

Dies werden wir nun präzise machen, durch den Beweis eines Satzes von Grothendieck.

1 Von Galoisgruppen zu Weilgruppen

1.1 Endliche Körper

Definition 1. Die **Weilgruppe eines endlichen Körpers** $k = \mathbb{F}_q$ ist die vom arithmetischen Frobenius $\varphi : x \mapsto x^q$ erzeugte Untergruppe $W(k_s/k) \subset Gal(k_s/k)$ der separablen Galoisgruppe.

Die Gruppe $Gal(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$ ist profinit und wird vom q-Frobenius topologisch erzeugt, also $Gal(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{Z}}$. Die Weilgruppe ist $W(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$, hat also $Gal(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$ als profinite Vervollständigung. Der **geometrische Frobenius** ist per definitionem $F := \varphi^{-1}$.

1.2 Lokale Körper

Proposition 1. *Der Quotient der Galoisgruppe eines lokalen Körpers K nach der Trägheitsgruppe $I(\mathfrak{P})$ eines Primideals $\mathfrak{P}$ der separablen Hülle K_s über dem maximalen Ideal von $\mathcal{O}_K$ ist isomorph zur Galoisgruppe des Restklassenkörpers k, d.h. es gibt eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \to I(\mathfrak{P}) \to Gal(K_s/K) \to Gal(k_s/k) \to 0.$$

Definition 2. Die **Weilgruppe eines nichtarchimedisch bewerteten lokalen Körpers** K ist definiert als die Erweiterung

$$0 \to I(\mathfrak{P}) \to W(K_s/K) \to W(k_s/k) \to 0$$

welche der Rückzug der Erweiterung von $Gal(k_s/k)$ mit $I(\mathfrak{P})$ entlang $W(k_s/k) \hookrightarrow Gal(k_s/k)$ ist. Damit ist auch eine Topologie auf $W(K_s/K)$ definiert, sodass $I(\mathfrak{P})$ eine offene Untergruppe ist und sodass $Gal(K_s/K)$ die profinite Vervollständigung von $W(K_s/K)$ ist.

Definition 3. Die **Weilgruppe eines archimedisch bewerteten lokalen Körpers** K ist definiert über eine Fallunterscheidung:

- $K \simeq \mathbb{C}$, dann $W(\overline{K}/K) := \overline{K}^{\times}$,
- $K \simeq \mathbb{R}$, dann $W(\overline{K}/K) := \overline{K}^{\times}[F]/\sim$, wobei die Relation von $F^2 \sim -1$ und $FzF^{-1} = \overline{z}$ für alle $z \in \overline{K}^{\times}$ erzeugt wird.

Man beobachtet leicht, dass für archimedisch bewertete lokale Körper K stets $W(\overline{K}/K)^{ab} \simeq \overline{K}^{\times}$ gilt. Für nichtarchimedisch bewertete lokale Körper K gibt es diesen Isomorphismus auch, aus der lokalen Klassenkörpertheorie.

Eine weitere Beobachtung ist, dass die Weilgruppe eines lokalen Körpers eine lokal kompakte Gruppe ist, im Gegensatz zur absoluten Galoisgruppe.

In jedem Falle hat man auch einen stetigen Gruppenhomomorphismus $W(K_s/K) \to G(K_s/K)$, der es erlaubt, Galoisdarstellungen als Darstellungen der Weilgruppe aufzufassen. Die Weilgruppe hat i.A. jedoch mehr Darstellungen als die volle Galoisgruppe.

1.3 Globale Körper

Definition 4. Sei $K/\mathbb{F}_p(t)$ eine endliche Erweiterung und k der Körper der konstanten Funktionen, also der algebraische Abschluss von $\mathbb{F}_p$ in K. Seien K^{sep} und k^{sep} entsprechende separable Hüllen und $G^0 := \mathrm{Ker}(Gal(K^{sep}/K) \twoheadrightarrow Gal(k^{sep}/k)$ der Kern der Restriktionsabbildung. Die **globale Weilgruppe** ist definiert als der Lift dieser Erweiterung entlang der Inklusion $W(k^{sep}/k) \hookrightarrow Gal(k^{sep}/k)$, also

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G^0 & \longrightarrow & W(K^{sep}/K) & \longrightarrow & W(k^{sep}/k) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & G^0 & \longrightarrow & Gal(K^{sep}/K) & \longrightarrow & Gal(k^{sep}/k) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

wobei die letzte Spalte isomorph zur Inklusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$ ist.

Zu jeder Stelle ν von K kann man einen Morphismus von Erweiterungen hinschreiben:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_\nu \arrow[r] \arrow[d] & W(K_\nu^{sep}/K_\nu) \arrow[r] \arrow[d] & W(k_\nu^{sep}/k_\nu) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G^0 \arrow[r] & W(K^{sep}/K) \arrow[r] & W(k^{sep}/k) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

und die letzte Spalte ist die Multiplikation mit $[k_\nu : k]$.

2 Grothendieck's Monodromiesatz

Wir erinnern uns an die folgende Sequenz von Körpererweiterungen eines nichtarchimedisch bewerteten lokalen Körpers K:

$$\begin{array}{c} K_s \\ | \\ K_{tame} \\ | \\ K_{nr} \\ | \\ K \\ | \\ \mathbb{Q}_p \end{array}$$

Außerdem erinnern wir uns an $Gal(K_{nr}/K) \simeq Gal(k_s/k) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$ und $Gal(K_s/K_{nr}) = I$.

Definition 5. Eine quadratische Matrix A heißt unipotent, wenn $\mathrm{Id} - A$ nilpotent ist, also eine endliche Potenz die Nullmatrix ergibt.

Definition 6. Eine stetige ℓ-adische Galoisdarstellung $\rho : G \to GL_n(\mathbb{Q}_\ell)$ heißt **semistabil**, wenn die Trägheitsgruppe unipotent operiert. Sie heißt **potentiell semistabil**, wenn es in der Trägheitsgruppe eine Untergruppe von endlichem Index gibt, die unipotent operiert.

Satz 1 (Grothendiecks Monodromiesatz)**.** *Sei K ein vollständiger nichtarchimedisch bewerteter lokaler Körper und $\rho : G_K \to GL_n(\mathbb{Q}_\ell)$ eine stetige ℓ-adische Darstellung der absoluten Galoisgruppe $G_K = Gal(K_s/K)$. Wenn keine endliche Erweiterung des Restklassenkörpers k alle ℓ^n-ten Einheitswurzeln enthält (für alle n), so ist ρ potentiell semistabil, d.h. es gibt eine Untergruppe $J \subset I$ von endlichem Index, sodass für alle $\sigma \in J$ stets $1 - \rho(\sigma)$ nilpotent ist.*

Außerdem gibt es einen nilpotenten linearen Operator $N \in End(V)(1) = Hom(V, V(1))$, der gegeben ist durch $N = \log \rho(\sigma)$ für $\sigma \in J$. Notiere $t_\ell : I \to \mathbb{Z}_\ell(1)(k_s)$ die Projektion auf die Galoisgruppe des ℓ-Anteils der zahmen Verzweigung. Dann erfüllt der Operator N für alle $\sigma \in J$:

$$\rho(\sigma) = \exp\left(N.t_\ell(\sigma)\right).$$

Dieses N ist eindeutig, daher Galois-invariant, also für $w \in W(K_s/K)$:

$$\rho(w)N\rho(w)^{-1} = \|w\|N = q^{-v(w)}N$$

*Man nennt N den **Logarithmus der Monodromie**.*

Körper K die die Bedingungen des Satzes erfüllen, sind z.B. endliche Erweiterungen von $\mathbb{Q}_p$, denn der Restklassenkörper ist dann auch endlich erzeugt über dem Primkörper $\mathbb{F}_p$; hingegen ist eine Erweiterung von $\mathbb{F}_p$, die alle ℓ^n-ten Einheitswurzeln enthält, nicht endlich erzeugt.

Beweis. Zunächst können wir uns auf den Fall einschränken, dass ρ bereits nach $GL_n(\mathbb{Z}_\ell)$ abbildet, denn dies ist eine abgeschlossene Untergruppe von $GL_n(\mathbb{Q}_\ell)$, ihr Urbild unter dem stetigen Homomorphismus ρ somit ebenfalls, also eine Untergruppe von endlichem Index, auf die wir ρ einschränken können (dies entspricht einer endlichen Körpererweiterung von K).

Mit dem gleichen Argument können wir das Urbild der Identität in $GL_n(\mathbb{Z}/\ell^2\mathbb{Z})$ unter der Reduktionsabbildung $GL_n(\mathbb{Z}_\ell) \to GL_n(\mathbb{Z}/\ell^2\mathbb{Z})$ und schließlich in G_K betrachten, was wiederum eine abgeschlossene Untergruppe ist.

Wir können sehen, dass $\mathrm{Im}(\rho)$ eine pro-ℓ-Gruppe ist: Wenn $A \in \mathrm{Im}(\rho)$ ist, so gilt für die Reduktion $\overline{A} \in GL_n(\mathbb{Z}/\ell^k\mathbb{Z})$ die Formel $\overline{A} = 1 + \ell^2 B$ und daher $\overline{A}^{\ell^k} = 1 + \ell^{2\ell^k} B^{\ell^k} = 1$, also ist $\overline{A}$ von Ordnung q mit $q|\ell^k$. Da dies für alle k gilt, ist auch A selbst von Ordnung q mit $q|\ell^\infty$.

Nun betrachten wir K_ℓ, die maximale zahm verzweigte ℓ-Erweiterung, d.h. die Erweiterung von K_{nr}, welche von allen ℓ^n-ten Wurzeln eines uniformisierenden Elements erzeugt wird, für alle n. Für $K = \mathbb{Q}_p$ wären dies also alle $p^{\frac{1}{\ell^n}}$. Dieser Körper K_ℓ hat nun die Eigenschaft, dass für jede endliche Erweiterung L/K_ℓ bereits alle ℓ-ten Wurzeln in L liegen (man also keine weitere ℓ-te Wurzel hinzufügen kann). Dies hat zur Konsequenz, dass $Gal(K_s/K_\ell)$ kein Element von Ordnung ℓ enthält, also Ordnung prim zu ℓ hat.

Damit können wir schließen, dass die Gruppe $\rho(Gal(K_s/K_\ell))$ sowohl eine pro-ℓ-Gruppe als auch von Ordnung prim zu ℓ sein muss, schließlich dass ρ auf $Gal(K_s/K_\ell) = G^{(0+)}$ (der wilden Verzweigungsgruppe) konstant 1 ist. Damit faktorisiert ρ über $Gal(K_\ell/K) \to GL_n(\mathbb{Q}_\ell)$.

Die Galoisgruppe $Gal(K_\ell/K_{nr})$ ist auch der Kern einer Erweiterung

$$0 \to Gal(K_\ell/K_{nr}) \to Gal(K_\ell/K) \to Gal(k_s/k) \to 0$$

und trägt somit eine natürliche $Gal(k_s/k)$-Operation durch Konjugation in $Gal(K_\ell/K)$.

Wir betrachten den $Gal(k_s/k)$-äquivarianten Isomorphismus $Gal(K_\ell/K_{nr}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_\ell(1)(k_s)$, der σ auf $\sigma(1)$ abbildet. Es ist als Gruppe $\mathbb{Z}_\ell(1)(k_s) \simeq \mathbb{Z}_\ell$, also sind die Automorphismen auch $\mathbb{Z}_\ell^\times$. Der Charakter $\chi : Gal(k_s/k) \to \mathbb{Z}_\ell^\times$, der die Gruppenoperation von $Gal(k_s/k)$ auf $\mathbb{Z}_\ell(1)$ beschreibt, ist dann ein zyklotomischer Charakter. Die Äquivarianz des Isomorphismus impliziert für $\sigma \in Gal(K_\ell/K_{nr})$ dass σ und $\sigma^{\chi(t)}$, für $t \in Gal(k_s/k)$ beliebig, in $Gal(K_\ell/K)$ zueinander konjugiert sind.

Setze $N := \log \rho(\sigma)$ (den ℓ-adischen Logarithmus, $-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$). Dann wissen wir

$$\log\left(\rho(\sigma)^{\chi}(t)\right) = \chi(t) \log\left(\rho(\sigma)\right) = \chi(t)N,$$

somit sind N und $\chi(t)N$ zueinander konjugierte Matrizen (für alle $t \in Gal(k_s/k)$). Sei a_i das i-te symmetrische Polynom in den Eigenwerten von N (mit Multiplizitäten), dann gilt

$$a_i(N) = a_i(\chi(t)N) = \chi(t)^i a_i(N).$$

Die Bedingung an den Restklassenkörper k impliziert, dass das Bild von χ eine unendliche Untergruppe von $\mathbb{Z}_\ell^\times$ ist, somit können wir also ein t wählen, dessen Bild $\chi(t)$ keine Einheitswurzel ist. Die letzte Gleichung hat dann $a_i(N) = 0$ zur Folge, für alle $i > 0$. Das aber bedeutet, dass N nilpotent ist.

Da wir $\rho(\sigma) \equiv 1(\ell^2)$ annehmen können, gibt es $\exp(\log \rho(\sigma))$ ($\exp_\ell(z)$ konvergiert für $v_\ell(z) > \frac{1}{\ell-1}$), und es gilt auch

$$\rho(\sigma) = \exp\left(\log\left(\rho(\sigma)\right)\right) = \exp(N)$$

und somit ist $\rho(\sigma)$ unipotent. □

3 Von Darstellungen der Weilgruppe zu Weil-Deligne-Darstellungen

Definition 7. Sei K ein lokaler Körper und E ein Körper von Charakteristik 0. Eine **Weil-Deligne-Darstellung** von W_K über E ist ein Paar (ρ, N), wobei $\rho : W_K \to Aut_E(V)$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus ist, mit V endlichdimensionaler diskreter Vektorraum über E, und $N \in End_E(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus mit der Eigenschaft

$$\forall w \in W_K : \rho(w) N \rho(w)^{-1} = \|w\| N.$$

Man kann auch eine **Weil-Deligne-Gruppe** als getwistete Erweiterung der Weilgruppe W_K mit einer additiven Gruppe $\mathbb{G}_a$ definieren, deren Darstellungen über E genau die Weil-Deligne-Darstellungen von W_K über E sind.

Satz 2. *Darstellungen der Weilgruppe W_K bis auf Isomorphismus sind in 1:1-Korrespondenz zu Weil-Deligne-Darstellungen.*

Beweis. Wir wählen einen Isomorphismus von Gruppen $\tau : \mathbb{Q}_\ell(1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell$ und einen Lift des geometrischen Frobenius $F \in W(\overline{K}/K)$. Wir assoziieren zu einer ℓ-adischen Darstellung $\rho : W_K \to ContAut_E(V)$ eine Weil-Deligne-Darstellung (ρ_{WD}, N_{WD}) mit $N \in Aut_E(V)(-1)$ definiert über Grothendieck's Monodromiesatz, $N_{WD} \in Aut_E(V)$ das Bild von N unter $\mathrm{id}_{Aut_E(V)} \otimes \tau$ und für $\sigma \in I$ definieren wir $\rho_{WD}(F^n\sigma) := \rho(F^n\sigma). \exp\left(-t_\ell(\sigma).N\right)$.

Man kann aus den Daten (ρ_{WD}, N_{WD}) auch ρ zurückgewinnen, durch

$$\rho(F^n\sigma) := \rho_{WD}(F^n\sigma). \exp\left(t_\ell(\sigma).N\right).$$

□