Konstruktionen

Zellen. Wir nennen den abgeschlossenen Ball $e^n := D^n := \overline{B^n(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ von Dimension n auch eine **n-Zelle**. Offensichtlich ist das Innere $\mathring{D}^n = B^n(0)$ homöomorph (und damit homotopieäquivalent) zu $\mathbb{R}^n$. Der Rand von e^n ist eine Sphäre $\partial e^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} = S^{n-1}$.

Raumpaare und -tripel.

Tripel. Ein Tripel (X, A, B) von Räumen besteht aus drei Räumen X, A, B und Inklusionen $A \hookrightarrow X$, $B \hookrightarrow A$. Diese Inklusionen werden in der Notation unterdrückt, wenn sie klar sind. Eine Abbildung von Raumtripeln $(X, A, B) \to (Y, C, D)$ besteht aus drei Abbildungen $f : X \to Y$, $g : A \to C$, $h : B \to D$ mit der Eigenschaft $f|_A = g$ und $g|_B = h$.

Wir werden später auch noch Triaden kennen lernen, die $(X; A, B)$ notiert werden, die sollte man nicht verwechseln.

Paare. Ein Paar von Räumen (X, A) ist ein Tripel (X, A, B) mit $B = \emptyset$. Ein Paar von Räumen mit Basispunkt ist ein Tripel (X, A, B) mit $B = *$. Eine Abbildungen von Paaren von Räumen mit Basispunkt ist also nichts als eine Abbildung von Paaren, die den Basispunkt erhält (der im kleineren Raum des Paares liegen muss). Ein Raum mit Basispunkt ist ein Paar $(X, *)$. Der Punkt in X, den man Basispunkt nennt, ist dann das Bild von $*$ unter der Inklusion $* \hookrightarrow X$, die zur Struktur eines Paares gehört.

Kegel und Suspension.

Kegel. Wir können über einem topologischen Raum X den **Kegel** $CX := C_+X := (X \times [0, 1]) / (X \times \{1\})$ bilden. Der ursprüngliche Raum ist Teilraum des Kegels $X = X \times \{0\} \hookrightarrow CX$. Nach Konstruktion lässt sich jeder Punkt x von X mit der Spitze des Kegels (also dem Bildpunkt von $X \times \{1\}$ in CX) verbinden, über einen linearen Weg $\gamma : [0, 1] \to CX$ der durch$\gamma(t) := \overline{(x, t)} \in CX$ gegeben ist. Völlig symmetrisch können wir $C_-X := (X \times [0, 1]) / (X \times \{0\})$ bilden. Offensichtlich sind C_+X und C_-X homöomorph.

Solche Kegel sind zusammenziehbar, denn die konstante Abbildung $c : C_-X \to *$ und die Inklusion der Spitze $i : * \to C_-X$ sind Homotopieäquivalenzen, wie die Homotopie $H : C_-X \times I \to C_-X$, $(\overline{(x, t)}, s) \mapsto \overline{(x, ts)})$ von $i \circ c$ nach id_{C_-X} zeigt.

Abbildungskegel. Zu einer Abbildung $f : A \to X$ können wir den **Abbildungskegel** bilden, das ist $C_f := (X \sqcup CA) / \sim$, wobei $f(a) \sim \overline{(a, 0)}$ für alle $a \in A$ gelten soll. Der normale Kegel ist der Abbildungskegel der Identität: $C_{\mathrm{id}_X} = CX$.

Der Kegel über einer Sphäre von Dimension $n - 1$ ist homöomorph zu einer n-Zelle. Der Abbildungskegel von $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ ist S^n.

Gegeben eine Abbildung $f : S^{n-1} \to X$, so nennen wir den Prozess, X durch C_f zu ersetzen, auch "das Einkleben einer n-Zelle".

Suspension. Eine andere wichtige Konstruktion ist die **Suspension** oder **Einhängung** eines Raums X, die als $SX := ((X \times [0, 1]) / (X \times \{1\})) / (X \times \{0\})$ definiert ist. Offensichtlich besteht SX aus einem oberen und einem unteren Kegel, genau genommen ist SX homöomorph zum Abbildungskegel von $X \hookrightarrow CX$.

Suspensionen sind im Allgemeinen nicht zusammenziehbar, wie schon das Beispiel der Suspension von $S^0 = \{-1, +1\}$ zeigt: es ist $SS^0 = S^1$, und die S^1 hat eine nichttriviale Fundamentalgruppe, kann also nicht zusammenziehbar sein. Die Suspension eines zusammenziehbaren Raums ist aber stets zusammenziehbar.

Man kann Abbildungen $f : X \to Y$ offensichtlich zu $f \times \mathrm{id} : X \times I \to Y \times I$ und damit auf Kegel und Suspension fortsetzen zu $Cf : CX \to CY$ und $Sf : SX \to SY$.

Ebenso lässt sich eine Abbildung von Raumpaaren $(X, A) \to (Y, B)$ fortsetzen zu einer Abbildung von Abbildungskegeln $C(A \hookrightarrow X) \to C(B \hookrightarrow Y)$.

Man überlegt sich leicht, dass nun die Zuordung von Raumpaaren zu ihren Abbildungskegeln einen Funktor definiert. Ebenso ist die Kegelbildung und die Suspension ein Funktor von Räumen zu Räumen.

Eine Homotopieäquivalenz $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$ induziert auch eine Homotopieäquivalenz $Sf : SX \xrightarrow{\simeq} SY$. Umgekehrt können aber die Suspensionen SX und SY homotopieäquivalent sein, ohne dass X und Y es sind. Ebenso gibt es Abbildungen $f : X \to Y$ welche nicht nullhomotop sind, dies aber nach Suspension werden.

Konstruktionen auf punktierten Räumen.

Reduzierte Suspension. Wählt man als Basispunkt eines Kegels CX das Bild eines Basispunktes unter $X \hookrightarrow CX$, so liefert Kegelbildung auch einen Funktor von punktierten Räumen zu punktierten Räumen.

Gegeben ein Raum X mit Basispunkt $x_0 \in X$ gibt es in der Suspension SX keinen kanonischen Basispunkt mehr. Darum definiert man die **reduzierte Suspension** $\Sigma X := SX/(\{x_0\} \times I)$, in der alle naiven Basispunkte $\overline{(x_0, t)}$ zu einem einzigen Punkt werden. Insbesondere sind die beiden Spitzen der Einhängung in der reduzierten Einhängung identifiziert.

Die reduzierte Suspension definiert einen Funktor von punktierten Räumen zu punktierten Räumen.

Wedge-Produkt. Sind X, Y zwei Räume mit Basispunkten $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$, so trägt die disjunkte Vereinigung keinen kanonischen Basispunkt mehr, man definiert das **Wedge-Produkt** $X \vee Y := (X \sqcup Y)/(x_0 \sim y_0)$, indem man die beiden Basispunkte miteinander identifiziert. Man kann das Wedge-Produkt als Teilraum des kartesischen Produkts auffassen: $i : X \vee Y \hookrightarrow X \times Y$, wobei $i(x) := (x, y_0)$ und $i(y) := (x_0, y)$ sein soll, denn offensichtlich ist dann auch $i(x_0) = i(y_0)$. Das kartesische Produkt $X \times Y$ hat einen kanonischen Basispunkt, nämlich (x_0, y_0). Das kartesische Produkt ist damit das kategorielle Produkt, das Wedge-Produkt ist die direkte Summe (Koprodukt) in der Kategorie der punktierten Räume.

Ein Beispiel. Wir können nun ein Beispiel angeben für eine nicht-nullhomotope Abbildung f mit nullhomotopem Σf. Sei dazu $h : \mathbb{C}^2 \setminus 0 \to \mathbb{CP}^1$ die **Hopf-Abbildung**. Es ist $\mathbb{R}^4 \setminus 0 \simeq S^3$ und $\mathbb{CP}^1 = S^2$, also können wir $h : S^3 \to S^2$ auffassen (bis auf Homotopieäquivalenz). Betrachte die "Pinch"-Abbildung $p : S^3 \to S^3 \vee S^3$, welche die obere Hemisphäre C_+S^2 auf den ersten Faktor $S^3 = \Sigma S^2$ abbildet, und dabei den Äquator $S^2 \subset S^3$ auf den Basispunkt schickt, und die untere Hemisphäre C_-S^2 analog auf den zweiten Faktor S^3 abbildet. Sei außerdem $q : S^2 \vee S^2 \to S^2$ die Abbildung, welche auf jeder Komponente die Identität $S^2 \to S^2$ ist. Die Abbildung $f := q \circ (h \vee h) \circ p : S^3 \to S^2$ (das "Quadrat der Hopf-Abbildung") leistet nun das gesuchte, d.h. $\Sigma f : S^4 \to S^3$ ist nullhomotop, f aber nicht.

Die Hopf-Abbildung selbst ist übrigens auch nicht nullhomotop und ihre Einhängung Σh auch nicht - ganz im Gegenteil, h erzeugt $\pi_3(S^2) \simeq \mathbb{Z}$ und Σh erzeugt $\pi_4(S^3) \simeq \mathbb{Z}/2$.

Beweisen können wir das hier noch nicht.

Smash-Produkt. Zusätzlich zum kartesischen Produkt gibt es aber das **Smash-Produkt** $X \wedge Y := (X \times Y)/(X \vee Y)$, in dem alle Punkte (x, y) mit $x = x_0$ oder $y = y_0$ zu einem Basispunkt zusammengefasst werden. Das Smash-Produkt ist nur für Räume mit Basispunkt definiert.

Die Vertauschungsabbildung $(X \times Y, X \vee Y) \to (Y \times X, Y \vee X)$, $(x, y) \mapsto (y, x)$, aufgefasst als eine Abbildung von Paaren, induziert einen Vertauschungsisomorphismus $X \wedge Y \xrightarrow{\simeq} Y \wedge X$.

Gegeben Abbildungen $f : X \to A$, $g : Y \to B$, lassen sich Wedge-Produkt $f \vee g : X \vee Y \to A \vee B,\ x \mapsto f(x),\ y \mapsto g(y)$ und Smash-Produkt $f \wedge g : X \wedge Y \to A \wedge B,\ \overline{(x,y)} \mapsto \overline{f(x), g(y)}$ definieren, sodass diese Konstruktionen funktoriell sind.

Die reduzierte Suspension ist das gleiche (bis auf Homöomorphie) wie das Smash-Produkt mit S^1:

$$X \wedge S^1 = \left(X \times S^1\right) / (X \vee S^1) = (X \times I/\{0,1\}) \,/\, (X \times \{0\}\ \cup\ \{x_0\} \times I/\{0,1\})$$

$$\cdots = \left(((X \times I)/(X \times \{0\}))\,/(X \times \{1\})\right) / (\{x_0\} \times I/\{0,1\}) = \Sigma X$$

Die Suspension einer Abbildung $f : X \to Y$ entspricht dabei genau dem Smash-Produkt mit id_{S^1}, d.h. $\Sigma f = f \wedge \mathrm{id}_{S^1}$.

CW-Komplexe, -Paare und zelluläre Abbildungen

CW-Komplexe.

Zellkomplexe. Die Struktur eines **Zellkomplexes** auf einem Hausdorffraum X besteht aus einer Menge von **charakteristischen Abbildungen** $f^n_\alpha : D^n \to X$, die durch Dimension $n \in \mathbb{N}$ und in jeder Dimension durch eine Indexmenge J_n indiziert sind, welche die Axiome 1–3 erfüllen. Um die Axiome zu formulieren, nennen wir die Bilder $e^n_\alpha := f^n_\alpha(D^n) \subset X$ die **Zellen** der Zellstruktur. Für $n \geq 0$ sei $K^n := \{e^k_\alpha \mid \alpha \in J_k,\ k \leq n\}$ das **n-Skelett** des Zellkomplexes und $X_n := |K^n| := \bigcup_{k \leq n, \alpha \in J_k} e^k_\alpha$ ist ein Teilraum von X. Wenn wir ohne Basispunkte arbeiten, setze $K^{-1} = \emptyset$, ansonsten behandeln wir den Basispunkt als $-\infty$-dimensionale Zelle, setze also $K^n := \{\{x_0\}\}$ für alle $n < 0$. Zu jeder n-Zelle e^n_α definieren wir noch den **Rand im Zellkomplex** $\partial e^n_\alpha := e^n_\alpha \cap |K^{n-1}|$ sowie das **Innere im Zellkomplex** $\mathring{e}^n_\alpha := e^n_\alpha \setminus \partial e^n_\alpha$.

(1) $X = |K| := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} |K^n|$, d.h. jeder Punkt liegt in einer Zelle,
(2) $\mathring{e}^n_\alpha \cap \mathring{e}^m_\beta \neq \emptyset \implies n = m$ und $\alpha = \beta \in J_n$, d.h. das Innere von einer Zelle liegt nur in genau dieser Zelle innen.
(3) Jede charakteristische Abbildung f^n_α ist eine surjektive Abbildung von Paaren
$$f^n_\alpha : (D^n, S^{n-1}) \twoheadrightarrow (e^n_\alpha, \partial e^n_\alpha)$$
welche das Innere $\mathring{D}^n \subset D^n$ homöomorph auf $\mathring{e}^n_\alpha$ abbildet.

Falls es ein n gibt mit $J_k = \emptyset$ für alle $k \geq n$, so heißt der Zellkomplex n-dimensional, sonst ∞-dimensional.

Eine direkte Konsequenz dieser Definition ist, dass X die disjunkte Vereinigung der $\mathring{e}^n_\alpha$ ist. Außerdem ist jede Zelle e^n_α kompakt, also abgeschlossen. Allerdings müssen die $\mathring{e}^n_\alpha$ nicht unbedingt offen sein, die Topologie eines Raums mit Zellkomplex-Struktur kann also sehr kompliziert aussehen.

Für eine Zelle e^n_α nennen wir die Zellen, deren Inneres mit $e^n_\alpha \cap K^{n-1}$ nichtleeren Schnitt hat, die unmittelbaren Seiten von e^n_α. Deren unmittelbare Seiten und deren Seiten nennt man die **Seiten** von e^n_α.

CW-Komplexe. Ein Zellkomplex heißt **CW-Komplex**, wenn die folgenden Axiome gelten:

C (closure finite): Jede Zelle e^n_α schneidet höchstens endlich oft das Innere von anderen Zellen.
W (weak topology): Eine Teilmenge $S \subset X$ ist abgeschlossen genau dann wenn $S \cap e^n_\alpha$ für alle Zellen e^n_α abgeschlossen in e^n_α ist.

Endliche Zellkomplexe, also solche mit nur endlich vielen Zellen, sind offensichtlich CW-Komplexe.

Wir nennen die Struktur eines Zellkomplexes auf einem Raum X, die ein CW-Komplex ist, auch eine CW-Struktur und den Raum dann einen CW-Komplex. Nicht jeder Raum erlaubt eine CW-Struktur, aber wenn es eine CW-Struktur gibt, so auch mehrere. Ist ein Raum homotopieäquivalent zu einem Raum, der eine CW-Struktur erlaubt, so heißt er **vom CW-Typ**.

Alternative Definition. Sei X_0 eine diskrete Menge von Punkten und $(f_i)_{i\in I_0}$ eine Familie von Funktionen $f_i : S^0 \to X_0$, so können wir $X_1 := X_0 \cup_{f_1} D^1 \cup_{f_2} D^1 \cup \cdots$ bilden, einen Raum, in dem entlang der Abbildungen f_i neue 1-Zellen in X_0 eingeklebt werden. Damit können wir weitermachen und induktiv in X_n zu Funktionen $(f_i)_{i\in I_n}$ der Form $f_i : S^n \to X_n$ den Raum X_{n+1} durch das Einkleben von $(n+1)$-Zellen bilden.

(1) Übungsaufgabe: Die so erhaltenen Räume sind CW-Komplexe.
(2) Übungsaufgabe: Auf diese Art erhält man jeden endlich-dimensionalen CW-Komplex.
(3) Übungsaufgabe: Wie lässt sich diese Konstruktion so verallgemeinern, dass man alle CW-Komplexe darüber erhält?

Die Antwort steht in Proposition 5.12 im Switzer, aber es lohnt sich, selbst einmal darüber nachzudenken.

Suspension vs. reduzierte Suspension. Ist X ein CW-Komplex, so ist die reduzierte Suspension homotopieäquivalent zur unreduzierten Suspension. Das kann man sich gut für Sphären überlegen und im Allgemeinen Induktion über das Skelett machen.

Zelluläre Abbildungen. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen CW-Komplexen heißt **zellulär**, wenn jede n-Zelle von X in das n-Skelett von Y abgebildet wird, also $f|X_n : X_n \to Y_n$. Zelluläre Abbildungen verringern höchstens die Dimension der Zellen.

Damit sind zelluläre Abbildungen der perfekte Kandidat für Induktionsargumente über die Dimension der Skelette.

Als Beispiel betrachten wir die Menge der zellulären Abbildungen $S^n \to S^m$ für $n < m$. Dazu müssen wir natürlich Zellstrukturen auf S^n und S^m festhalten. Auf der kleineren Sphäre S^n wollen wir die Zellstruktur wählen, die aus einem Basispunkt mit einer angeklebten n-Zelle besteht ($S^n = * \cup_\varphi e^n$ mit $\varphi : \partial e^n \to *$), auf der größeren Sphäre S^m können wir nun auch so eine Zellstruktur wählen, oder aber an S^n eine m-Zelle ankleben, sodass S^n auf dem Äquator der S^m liegt. Mit der ersten Zellstruktur auf S^m gibt es nur eine zelluläre Abbildung $S^n \to S^m$, nämlich die konstante Abbildung auf den Basispunkt. Mit der zweiten Zellstruktur gibt es jede Menge zelluläre Abbildungen, nämlich ebenso viele, wie es Abbildungen $S^n \to S^n$ gibt.

CW-Paare und relative CW-Komplexe. Auf einem Raumpaar (X, A) ist eine **relative CW-Struktur** gegeben durch eine Sequenz

$$A = (X, A)^{-1} \subset (X, A)^0 \subset \cdots \subset (X, A)^n \subset (X, A)^{n+1} \subset \cdots \subset X$$

sodass $(X, A)^n$ aus $(X, A)^{n-1}$ durch Ankleben von n-Zellen hervorgeht und X die Vereinigung aller $(X, A)^n$ mit der schwachen Topologie ist.

Falls $X = (X, A)^n$ und n minimal mit dieser Eigenschaft ist, so nennen wir n die **Dimension** von (X, A). Klar: Für $A = \{a_0\}$ einen Basispunkt erhalten wir gewöhnliche CW-Komplexe. Ist umgekehrt $A \subset X$ ein Unterkomplex eines CW-Komplexes, so ist (X, A) ein relativer CW-Komplex.

Produkte von CW-Komplexen. Für Zellkomplexe K auf X und L auf Y können wir

$$K \times L := \{e^n_\alpha \times e^m_\beta \mid e^n_\alpha \in K,\ e^m_\beta \in L\}$$

bilden, dies ist eine Zellstruktur auf $X \times Y$, wenn man als charakteristische Abbildung

$$D^{n+m} \simeq D^n \times D^m \xrightarrow{f^n_\alpha \times f^m_\beta} e^n_\alpha \times e^m_\beta$$

verwendet. Achtung: Selbst wenn K und L CW-Strukturen sind, ist $K \times L$ nicht notwendig eine CW-Struktur, da die Produkttopologie auf $X \times Y$ i.A. nicht mit der schwachen Topologie übereinstimmt. Wenn K oder L lokal endlich ist, d.h. jeder Punkt hat eine Umgebung, die nur endlich viele Zellen schneidet, dann tritt dieses Problem nicht auf. Daher ist für einen CW-Komplex X stets auch $X \times I$ ein CW-Komplex. Im Allgemeinen geben wir $X \times Y$ einfach die schwache Topologie, damit es wieder ein CW-Komplex wird.

Für einen relativen CW-Komplex (X, A) ist auch X/A ein CW-Komplex, denn X/A geht aus A/A durch Ankleben von Zellen hervor (Übungsaufgabe).

Nun ist für CW-Komplexe X, Y stets $(X \times Y, X \vee Y)$ ein relativer CW-Komplex und somit $X \wedge Y$ ein CW-Komplex.

Faserungen und Kofaserungen. Die Begriffe "Faserung" und "Kofaserung" formalisieren Eigenschaften von Abbildungen, die in der Homotopietheorie besonders wichtig sind.

Der Prototyp einer Faserung ist die Abbildung $f : PB \to B$, welche jedem Pfad γ aus dem Pfadraum $PB = \{\gamma : I \to B \mid \gamma(0) = b_0\}$ am Basispunkt b_0 den Endpunkt $\gamma(1)$ zuordnet. Die Faser über dem Basispunkt ist $f^{-1}(b_0) =: \Omega B$, der Raum aller Schleifen in B am Basispunkt b_0.

Faserungen. Eine (Hurewicz)-**Faserung** ist eine stetige Abbildung $f : E \to B$ mit der universellen Eigenschaft, dass für jeden topologischen Raum X, die Abbildung $i_0 : X \to X \times I,\ x \mapsto (x, 0)$ und jedes Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "f"] \\ X \times I \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & B \end{tikzcd}$$

der diagonale Pfeil ("Lift") existiert. Manche nennen dies auch das **Homotopieliftungskriterium**.

Jede Überlagerung ist eine Faserung. Man kann sogar zeigen, dass Faserungen mit diskreter Faser genau das gleiche sind wie Überlagerungen.

Kofaserungen. Wir erinnern uns an die "Adjunktion" in der Kategorie der Mengen

$$Abb(A \times B, C) \simeq Abb(A, Abb(B, C))$$

und ihr Analogon in der Kategorie der topologischen Räume (z.B. lokal kompakte und Hausdorffsche Räume)

$$Hom(A \times B, C) \simeq Hom(A, Map(B, C))$$

wobei $Map(B, C)$ die kompakt-offen Topologie trägt und damit wieder ein topologischer Raum ist.

Statt $f : E \to B$ betrachten wir nun $g : A \to X$ und dualisieren das Diagramm, welches "Faserung" definiert, indem wir $X \times I$ durch das duale Y^I ersetzen und alle Pfeile umdrehen:

$$\begin{tikzcd}
Y & X \arrow[l] \arrow[dl, dotted] \\
Y^I \arrow[u, "p_0"] & A \arrow[l] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Dabei ist die Abbildung $p_0 : Y^I \to Y$ das Auswerten einer Abbildung $I \to Y$ an $0 \in I$.

Wir nennen eine stetige Abbildung $g : A \to X$, für die in jedem solchen Diagramm der diagonale Pfeil existiert, eine (Hurewicz)-**Kofaserung**. Manche nennen diese Bedingung auch **Homotopieerweiterungseigenschaft**.

Kofaserungseigenschaft zellulärer Inklusionen. Der Prototyp einer Kofaserung ist das Ankleben einer Zelle:

Für jede Abbildung $g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ist die Inklusion $j : Y \to Y \cup_g CX$ eine Kofaserung.

Beweis: Gegeben ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & W^I \arrow[d, "p_0"] \\
Y \cup_g CX \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dotted] & W
\end{tikzcd}$$

müssen wir einen diagonalen Pfeil konstruieren. Dazu sei $G : Y \times I \to W$ die Abbildung, die $Y \to W^I$ im Diagramm unter Dualität entspricht. Wir definieren hilfsweise erst einmal $G' : CX \times \{0\} \cup X \times I \to W$ auf $CX \times \{0\}$ durch $f|_{CX}$ und auf $X \times I$ durch $G \circ (g \times 1)$. Sei nun $r : I \times I \to I \times \{0\} \cup \overset{\circ}{I} \times I$ eine Retraktion. Wir definieren $H : (Y \cup_g CX) \times I \to W$ auf $Y \times I$ durch G und für $[s, x] \in CX$ und $t \in I$ setzen wir

$$H([s, x], t) := G'([pr_1 \circ r(s, t), x], pr_2 \circ r(s, t)).$$

Dieses H ist stetig und $H_0 = f$. $\square$

Eine unmittelbare Konsequenz daraus ist, dass für jeden relativen CW-Komplex (X, A) die Inklusion $A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung ist, denn jedes $(X, A)^{n-1} \hookrightarrow (X, A)^n$ ist eine Kofaserung und damit lassen sich für jedes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & Y^I \arrow[d, "p_0"] \\
X \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y
\end{tikzcd}$$

induktiv Homotopielifts $X \times I \to Y$ konstruieren (schließlich liegt jeder Punkt $x \in X$ bereits in einem $(X, A)^n$ und es lassen sich Homotopielifts $F^n : (X, A)^n \times I \to Y$ so konstruieren, dass $F^n|_{(X,A)^{n-1}} = F^{n-1}$ ist).