

Elementare Einführung in die Sprache der Kategorien

Konrad Völkel

7. Mai 2009

Wozu soll ich die Sprache der Kategorien lernen? Abgesehen davon, dass die Sprache der Kategorien in einigen Zweigen der Mathematik so weitreichende Verwendung findet, dass man nicht darum herum kommt, sie zu lernen (z.B. algebraische Geometrie), nützt sie, um Zusammenhänge kompakter aufzuschreiben und damit leichter zu verstehen und zu merken. Kategorientheorie verallgemeinert viele bekannte Konzepte und bietet damit die Möglichkeit, abstrakt mit konkreten Objekten zu operieren, ohne die konkreten Objekte genau verstehen zu müssen. Zuletzt ist die besondere Eleganz dieser Sprache zu erwähnen - einige schwierige Theoreme wirken kategoriell ausgedrückt trivial.

Warum wurden Kategorien erfunden? Etwa 1940 haben Saunders MacLane und Samuel Eilenberg versucht, den Begriff “natürliche Transformation” in der Topologie zu präzisieren. Dazu mussten sie den Begriff des Funktors definieren, der sich auf den Begriff der Kategorie stützt. Mit der neuen Sprache betrachtete man nun eine ganze Sammlung von Objekten ähnlicher Struktur als ein Objekt - so bilden alle reellen Vektorräume mit den linearen Abbildungen dazwischen eine Kategorie, ein einziges mathematisches Objekt.

Schliesslich wurde Kategorientheorie weiter betrieben, um auch andere Gebiete als die Topologie davon profitieren zu lassen, unter anderem auch Logik und Informatik.

Wo lerne ich mehr über Kategorien? Das Standardwerk für die elementaren Begriffe ist [Mac71]. Zu weiterführenden Themen gibt es umfangreiche Literatur, zu erwähnen ist das online erhältliche [AHS90] sowie [Bor94].

Am Anfang ist es vielleicht ein bisschen trocken, die dort auftauchenden Begriffe zu lernen - oder es fehlt Fachwissen aus diversen Zweigen der Mathematik, die als Beispiel herangezogen werden. Es empfiehlt sich daher, stets nach Beispielen in der bisher bekannten Mathematik zu suchen - Kategorientheorie versteckt sich nahezu überall!

1 An den mathematisch nicht vorgebildeten Leser

1.1 Die Definition einer Kategorie

Wir schauen uns die Definition einer Kategorie an, die wir dann Stück für Stück verstehen wollen:

Definition 1. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist eine Sammlung von **Objekten** $\text{Ob } \mathcal{C}$ und für je zwei Objekte X, Y in $\text{Ob } \mathcal{C}$ eine Menge $\mathcal{C}(X, Y)$, die **Morphismenmenge** genannt wird, zusammen mit einer

assoziativen Verknüpfung $\circ$ von Morphismen, d.h. für je drei Objekte X, Y, Z in $\text{Ob } \mathcal{C}$ eine Abbildung $\circ : \mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$, die ein Paar (g, f) mit $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$ und $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ auf $(g \circ f) \in \mathcal{C}(X, Z)$ abbildet und bei der Klammerung keine Rolle spielt. Ausserdem muss es für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ einen Morphismus $\text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$ (**Identität**) geben, sodass die Verknüpfung mit id_X nichts ändert - also für $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ gilt $f \circ \text{id}_X = f$ und für ein $h \in \mathcal{C}(Y, X)$ gilt $\text{id}_X \circ h = h$.

Dies ist eine Definition des Begriffs **Kategorie**. Das Zeichen $\mathcal{C}$ ist ein Name für eine beliebige Kategorie, der benutzt wird, um zu definieren, was für Eigenschaften man von einem Ding fordert, damit man es Kategorie nennen darf.

Eine Sammlung ist einfach “mehrere Dinger”, ohne irgendeine Zusatzstruktur. Man darf so eine Sammlung naiv einfach $\{x, y, z\}$ schreiben, wenn die Dinger x, y, z in der Sammlung drin sind. Zum Beispiel die Sammlung aller Jahreszeiten: $\{\text{Frühling, Sommer, Herbst, Winter}\}$. So eine Sammlung kann aber auch unendlich viele Dinger enthalten, z.B. alle ganzen Zahlen von 0 aufwärts - diese Sammlung nennt man $\mathbb{N}$, die **natürlichen Zahlen**, und schreibt auch $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Was man sich merken sollte ist, dass eine Sammlung durch das, was darin enthalten ist, also durch ihre Elemente, eindeutig bestimmt sein soll. Nimmt man also ein paar Dinge und fasst sie in einer Sammlung zusammen, so sind darin genau die Dinge, die man hinein getan hat und keine anderen,

Was ist nun ein Objekt? Die Definition von “Kategorie” definiert zugleich, was ein “Objekt” sein soll - zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ gehört laut Definition nämlich eine Sammlung $\text{Ob } \mathcal{C}$ und laut Definition nennt man bei einer Kategorie die Elemente dieser Sammlung **Objekte**. Ein Objekt ist also einfach irgendetwas, was in der Sammlung mit dem Namen $\text{Ob } \mathcal{C}$ enthalten ist. Die Definition von “Objekt” sagt also nichts über bestimmte Eigenschaften von Objekten aus - wir stellen uns Objekte daher am besten als etwas vor, das keine Struktur hat, also z.B. wie einen Punkt.

Jetzt ist die Rede von einer Menge $\mathcal{C}(X, Y)$, die für je zwei Objekte X, Y definiert ist. Eine Menge ist eine besondere Art von Sammlung - man fordert von einer Sammlung bestimmte Eigenschaften (Axiome), damit sie sich Menge nennen darf. Das wichtigste Axiom ist, dass eine Menge nicht beliebige Dinge enthalten darf (wie eine beliebige Sammlung) sondern nur weitere Mengen (nicht aber sich selbst). Diese Eigenschaften ermöglichen bestimmte logische Schlüsse, die das Leben als Mathematiker erleichtern und einige Theorie erst ermöglichen. So ist zum Beispiel für eine Menge klar definiert, was das sogenannte **Produkt** von zwei Mengen ist: Ist also $X = \{\alpha, \beta, \dots\}$ eine Menge und $Y = \{\delta, \gamma, \dots\}$ eine andere Menge, so definiert man $X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$, damit meint man also die Menge aller Paare (x, y) wobei x ein Element aus X und y ein Element aus Y sein soll - dafür die Notation $x \in X$ bzw. $y \in Y$. Also ist z.B. $(\alpha, \delta) \in X \times Y$, aber auch $(\beta, \delta) \in X \times Y$.

Zurück zur Definition einer Kategorie! Es wird also für $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ eine Menge mit dem Namen $\mathcal{C}(X, Y)$ gefordert (wir hätten sie auch “Morphismen in $\mathcal{C}$ von X nach Y ” nennen können, das wäre aber etwas unpraktisch, darum heißt sie $\mathcal{C}(X, Y)$). Diese sogenannte Morphismenmenge soll noch bestimmte Eigenschaften haben, bestimmten Axiomen genügen (damit sich $\mathcal{C}$ wirklich eine Kategorie nennen darf), das wird weiter hinten in der Definition erklärt. Dort ist die Rede von einem Element id_X , dass sich in der Menge $\mathcal{C}(X, X)$ finden soll, und zwar für jedes $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ (also viele verschiedene Elemente id , für jedes Objekt genau eins). Diese sogenannten “Identitäten”, soll es aber auch nicht nur geben, sie sollen auch bestimmte Eigenschaften erfüllen. Diese Eigenschaften hängen damit zusammen, dass auf den Morphismen einer Kategorie, also der Gesamtheit aller Mengen $\mathcal{C}(X, Y)$ für alle Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ eine Verknüpfung definiert sein soll. Diese Verknüpfung, so sagt uns die Definition, soll “assoziativ” sein - wir kommen

gleich dazu - und für je zwei Morphismen $f \in \mathcal{C}(Y, Z)$ bzw. $g \in \mathcal{C}(X, Y)$ soll es einen weiteren Morphismus $f \circ g \in \mathcal{C}(X, Z)$ geben.

Wir wollen uns die Objekte einer Kategorie für einen Moment als Punkte vorstellen, die mit einem gewissen Abstand voneinander auf einem Papier aufgemalt sind. Dann stellen wir uns die Morphismen von X nach Y , also die Elemente von $\mathcal{C}(X, Y)$ als Pfeile vom Punkt X zum Punkt Y vor. Die Verknüpfung von Morphismen können wir uns nun vorstellen wie das Aneinanderkleben von Pfeilen, wenn man also einen Pfeil mit Namen g von X nach Y hat sowie einen Pfeil mit Namen f von Y nach Z , so kann man diese zusammenkleben zu einem Pfeil, der von X nach Z geht, dabei einen kleinen Umweg über Y macht. Die Identität ist nun ein Pfeil, der von einem Punkt auf sich selber zeigt und “nichts tut”, d.h. es soll stets gelten, dass man an einen Pfeil $g \in \mathcal{C}(X, Y)$ den Pfeil $\text{id}_Y \in \mathcal{C}(Y, Y)$ ankleben kann, ohne das sich etwas ändert, also $\text{id}_Y \circ g = g$. Ebenso soll gelten für einen Pfeil $f \in \mathcal{C}(Y, Z)$, dass $f \circ \text{id}_Y = f$. Nun muss man etwas aufpassen: Pfeile kann man nicht beliebig aneinanderhängen, z.B. ein Pfeil von A nach B lässt sich nicht an einen Pfeil ankleben, der von A nach C geht, jedenfalls solange $C \neq B$. So ist es auch mit den Morphismen einer Kategorie, daher kann man auch nicht im vorigen Beispiel die Verknüpfung $g \circ \text{id}_Y$ bilden - ganz einfach, weil id_Y ein Pfeil von Y nach Y ist, der Pfeil g aber nicht bei Y startet, sondern bei X . Der Kringel für die Verknüpfung wird oft “nach” gelesen, denn man läuft bei der Verknüpfung $f \circ g$ erst den Pfeil g entlang und danach den Pfeil f , also f nach g .

Was war also mit “assoziativ”? Assoziativität heisst ganz einfach, dass man keine Klammern braucht. Strenggenommen müsste man nämlich, wenn man drei Morphismen miteinander verknüpfen möchte, also z.B. $h \in \mathcal{C}(W, X)$ mit $f \in \mathcal{C}(Y, Z)$ und $g \in \mathcal{C}(X, Y)$ zu der Komposition $f \circ g \circ h$, genau festlegen, ob man erst h mit g verknüpfen soll und danach das Resultat $g \circ h$ mit f zu der Komposition $f \circ (g \circ h)$ oder ob man erst f mit g verknüpfen soll und danach das Resultat $f \circ g$ mit h zu der Komposition $(f \circ g) \circ h$. Im Allgemeinen sind die beiden Ausdrücke $f \circ (g \circ h)$ und $(f \circ g) \circ h$ in der Mathematik nicht gleich, allerdings bedeutet **Assoziativität**, dass sie eben doch gleich sind, wir also die Klammern weglassen können, wenn wir wollen.

1.2 Wie definiert man eine Kategorie

Wenn man sich nun Beispiele ansieht, wie eine Kategorie konkret aussieht, dann muss man zunächst einmal eine saubere Definition davon geben, was man gerade betrachtet. Um eine Kategorie zu betrachten, muss man also:

- Einen Namen geben - z.B. $\mathcal{C}$ oder auch $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$
- Sagen, was die Objekte sein sollen, also die Sammlung $\text{Ob } \mathcal{C}$ spezifizieren, etwa durch “die Sammlung aller Jahreszeiten” oder durch $\text{Ob } \mathcal{C} := \mathbb{N}$, dann definiert man die Objekte als genau die Menge der natürlichen Zahlen. Der Doppelpunkt vor einem Gleichheitszeichen meint dabei, dass die linke Seite durch die rechte Seite definiert wird.
- Für je zwei Objekte sagen, was die Morphismen dazwischen sein sollen, also für jedes Paar (X, Y) mit $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, ja selbst für jedes Paar (X, X) , muss man spezifizieren, was $\mathcal{C}(X, Y)$ für Elemente enthält.
- Klar: damit man eine Kategorie erhält, muss für jedes Objekt X immer auch ein id_X in der Menge $\mathcal{C}(X, X)$ sein.
- Und schliesslich muss man noch erklären, wie die Verknüpfung von Morphismen definiert ist. Dabei muss man natürlich aufpassen, dass die Verknüpfung die Identität respektiert,

also $f \circ \text{id} = f$ usw. und dass die Verknüpfung tatsächlich assoziativ ist, also Klammern nicht nötig sind.

2 Elementare Begriffe

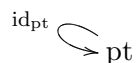
2.1 Kategorien

Definition 2. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist eine Sammlung von **Objekten** $\text{Ob } \mathcal{C}$ und für je zwei Objekte X, Y in $\text{Ob } \mathcal{C}$ eine Menge $\mathcal{C}(X, Y)$, die **Morphismenmenge** genannt wird, zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung $\circ$ von Morphismen, d.h. für je drei Objekte X, Y, Z in $\text{Ob } \mathcal{C}$ eine Abbildung $\circ : \mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$, die ein Paar (g, f) mit $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$ und $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ auf $(g \circ f) \in \mathcal{C}(X, Z)$ abbildet und bei der Klammerung keine Rolle spielt. Ausserdem muss es für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ einen Morphismus $\text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$ (**Identität**) geben, sodass die Verknüpfung mit id_X nichts ändert - also für $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ gilt $f \circ \text{id}_X = f$ und für ein $h \in \mathcal{C}(Y, X)$ gilt $\text{id}_X \circ h = h$.

Den Begriff "Sammlung" kann man verschiedentlich interpretieren. Wenn man ihn als "Klasse" interpretiert, bekommt man den in der Literatur üblichen Begriff. Interpretiert man "Sammlung" aber mit "Menge", so definiert man eigentlich das, was in der Literatur unter dem Namen "kleine Kategorie" bekannt ist. Es gibt ziemlich viele Kategorien, die nicht "klein" sind, d.h. deren Objektsammlung keine Menge ist. Das ist hier aber nicht so wichtig, da wir uns erst einmal Beispiele mit einer endlichen Objektsammlung anschauen werden.

Beispiel 1. Die Kategorie "1" ist definiert als $\text{Ob } 1 := \{\text{pt}\}$ und $1(\text{pt}, \text{pt}) := \{\text{id}_{\text{pt}}\}$. Die Verknüpfung brauchen wir nicht zu definieren, denn es muss gelten: $\text{id}_{\text{pt}} \circ \text{id}_{\text{pt}} = \text{id}_{\text{pt}}$ und sonst gibt es nichts zu sagen. "pt" steht für "Punkt".

Man kann diese Kategorie 1 zeichnen:



dabei lässt man beim Zeichnen von Kategorien gern die Identitäten weg - hier also id_{pt} . Die Zeichnung wird dann noch einfacher:

pt

Allgemein zeichnet man eine Kategorie, indem man alle Objekte hinschreibt und die Morphismen als Pfeile dazwischen zeichnet - ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ wird so zu einem Pfeil von X nach Y , der mit " f " beschriftet ist.

Oft möchte man sich von einer großen Kategorie nur einen Ausschnitt angucken, und zeichnet dann nicht alle Objekte der Kategorie und nicht alle Morphismen zwischen den gezeichneten Objekten. Technisch betrachtet zeichnet man dann ein **Diagramm**, aber so genau wollen wir es hier noch nicht nehmen.

Beispiel 2. Die Kategorie "2" ist definiert als $\text{Ob } 2 := \{X, Y\}$ und $2(X, X) := \{\text{id}_X\}$, $2(Y, Y) := \{\text{id}_Y\}$, $2(X, Y) := \emptyset$, $2(Y, X) := \emptyset$. Das Symbol " $\emptyset$ " bedeutet $\{\}$, also die leere Menge - es gibt also keine Morphismen zwischen X und Y . Die Kategorie 2 können wir so zeichnen:

X Y

wobei wir die Identitäten wieder weggelassen haben.

Zugegebenermaßen ist das ein etwas langweiliges Beispiel - man sagt auch, es handelt sich um eine **diskrete Kategorie**, und so nennt man alle Kategorien in der die Identitäten die einzigen Morphismen sind. Jede Menge ist trivialerweise eine diskrete Kategorie, denn wir fügen einfach für jedes Element der Menge einen Identitätsmorphismus hinzu und schon haben wir eine Kategorie.

Ein spannenderes Beispiel ist die Kategorie “**2**”, die definiert ist als $\text{Ob } \mathbf{2} := \{1, 2\}$ und $\mathbf{2}(1, 1) := \{\text{id}_1\}$, $\mathbf{2}(2, 2) := \{\text{id}_2\}$, $\mathbf{2}(1, 2) := \{\alpha\}$, $\mathbf{2}(2, 1) := \emptyset$. Es gibt also einen Morphismus von 1 nach 2 - sonst ist alles wie bei der Kategorie **2**. Achtung: Wir wollen nicht das Objekt $2 \in \text{Ob } \mathbf{2}$ mit der Kategorie **2** verwechseln. Wir zeichnen die Kategorie **2**:

$$1 \rightarrow 2$$

In der Zeichnung steckt auch schon alles drin, was für die Definition von **2** von Belang ist. Wir hätten also auch sagen können: “Sei **2** die Kategorie mit zwei Objekten 1, 2 und einem Morphismus von 1 nach 2”. Das wollen wir auch in Zukunft so tun.

Beispiel 3. Die Kategorie **3** ist die Kategorie mit drei Objekten ohne Morphismen dazwischen. Die Kategorie **3** hingegen definieren wir als die Kategorie mit drei Objekten 1, 2, 3 und dazu Morphismen von 1 nach 2, von 2 nach 3 sowie ein Morphismus von 1 nach 3. Nun gibt es verschiedene Möglichkeiten der Verknüpfung und wir müssen noch definieren, wie das geschehen soll. Dazu genügt es hier zu sagen, dass der Morphismus von 1 nach 2, verknüpft mit dem von 2 nach 3 derjenige sein soll, der von 1 nach 3 geht. Geben wir den Morphismen Namen, so können wir das so zeichnen:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 & \xrightarrow{\beta} & 3 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \beta \circ \alpha & & \end{array}$$

Wer verwirrt über die Reihenfolge von α und β im Ausdruck $\beta \circ \alpha$ ist, sollte sich merken, dass man das Symbol $\circ$ als “nach” aussprechen kann - hier also “Beta nach Alpha”.

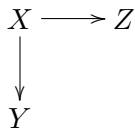
Bei der Definition von **3** hätten wir den Morphismus von 1 nach 3, der nun den Namen $\beta \circ \alpha$ bekommen hat, gar nicht angeben brauchen, wenn wir einfach gesagt hätten, dass es α, β und “alle Verknüpfungen davon” geben soll. Dann hätten wir auch die Verknüpfung nicht mehr zusätzlich definieren müssen! In Zukunft wollen wir also die Verknüpfungen nicht mehr immer mit notieren.

Beispiel 4. Wie die Kategorien **4** und **4** aussehen könnten, ist eine gute Übungsaufgabe. Wir werden uns lieber ansehen, was man mit drei Objekten noch sinnvolles anstellen kann. Für die Kategorientheorie (und vor allem spezielle sogenannte **Limiten**) sehr wichtig ist die Kategorie “**┐**”, die aus drei Objekten X, Y, Z besteht, deren Morphismen wir durch eine Zeichnung definieren wollen:

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ & \downarrow & \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

da gibt es offensichtlich nichts zu verknüpfen, darum sprechen wir nicht darüber.

Wenn man in der Zeichnung alle Pfeile umdreht, bekommt man eine andere Kategorie, die wir passenderweise “ $\lrcorner$ ” nennen wollen:



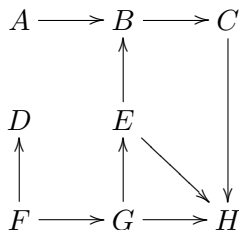
Alle Pfeile umzudrehen ist etwas, was in der Kategorientheorie häufig passiert und oft sehr hilfreich ist. Leider ist es oft auch sehr verwirrend. Man spricht in der Literatur oft vom “dualisieren” oder “opponieren” und nennt auch die Kategorien $\lrcorner$ und $\lrcorner$ **opponiert** zueinander. Man schreibt auch $\lrcorner^\circ = \lrcorner$ bzw. $\lrcorner^\circ = \lrcorner$. Der Kringel steht für “o” wie “opponieren”.

Allgemein definiert man für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ihre opponierte Kategorie $\mathcal{C}^\circ$ durch $\text{Ob } \mathcal{C}^\circ := \text{Ob } \mathcal{C}$ und für alle $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ setzt man $\mathcal{C}^\circ(X, Y) := \mathcal{C}(Y, X)$ - d.h. man dreht die Morphismenrichtung um.

Beispiel 5. Ebenfalls ein später sehr wichtig werdendes Beispiel ist die Kategorie $\rightrightarrows$, die zwei Objekte X, Y hat und zwischen diesen Objekten zwei Morphismen. Der Name kommt auch hier von der Form der Zeichnung:

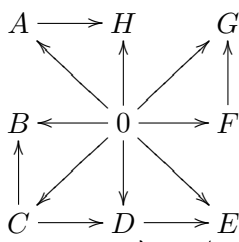


Beispiel 6. Hier ist die Zeichnung einer Kategorie:



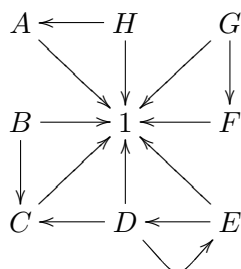
Übungsaufgabe: Finde heraus, welche Pfeile im vorigen Beispiel man verknüpfen kann und wie man diese Kategorie ohne eine Zeichnung formal definiert.

Beispiel 7. In dieser Kategorie:



gibt es für jedes Objekt genau einen Pfeil vom mit 0 benannten Objekt ausgehend. Man nennt so ein Objekt 0 dann auch **initiales Objekt**. Ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ heißt also **initial**, wenn für jedes $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ die Menge von Morphismen $\mathcal{C}(X, Y)$ genau ein Element hat. Man nennt initiale Objekte eigentlich immer 0.

Dieses Beispiel lässt sich dualisieren, indem wir alle Pfeile umdrehen. Wir nennen die 0 jetzt aber 1:



Ein solches Objekt heißt **terminales Objekt**. Wir können also definieren: Ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ heißt **terminal**, wenn für jedes $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ die Menge von Morphismen $\mathcal{C}(Y, X)$ genau ein Element hat. Man nennt terminale Objekte meistens 1 (darum haben wir das auch gleich getan). Wenn wir uns an die Definition der opponierten Kategorie erinnern, können wir aber auch sagen (oder definieren): Ein terminales Objekt einer Kategorie ist dasselbe wie ein initiales Objekt in der opponierten Kategorie!

Wir wollen uns jetzt noch überlegen, wieso es in einer Kategorie mit einem initialen Objekt (das es ja nicht immer geben muss) nicht zwei verschiedene initiale Objekte geben kann - man sagt, ein initiales Objekt ist **eindeutig** oder auch, die Eigenschaft, initial zu sein, ist eine **universelle Eigenschaft**.

Nehmen wir also an, es gäbe in einer Kategorie $\mathcal{C}$ zwei Objekte X und Y , die beide initial sind. Dann gibt es also genau einen Morphismus von X nach Y , denn X ist initial; wir wollen diesen Morphismus α nennen. Ausserdem gibt es genau einen Morphismus von Y nach X , denn Y ist initial; diesem Morphismus geben wir den Namen β . Jetzt schauen wir uns die Verknüpfung $\beta \circ \alpha$ an, das ist ein Morphismus von X nach X . Da aber X initial ist, kann es auch nur einen Morphismus von X nach X geben, und da es die Identität geben muss, muss schon $\beta \circ \alpha = \text{id}_X$ sein. Ebenso sehen wir, dass $\alpha \circ \beta = \text{id}_Y$ gilt. Das sind genau die Eigenschaften, die α und β definitionsgemäß zu einem **Isomorphismus** machen und in der Kategorientheorie betrachten wir zwei Objekte, zwischen denen es einen Isomorphismus gibt, als im Wesentlichen gleich, wir sagen **isomorph** und schreiben auch

$$X \xrightarrow{\sim} Y$$

für den Morphismus α .

Nochmal zur Erinnerung: Ein Morphismus $\alpha \in \mathcal{C}(X, Y)$ heißt **iso** oder auch **Isomorphismus**, wenn es einen Morphismus in der anderen Richtung, also $\beta \in \mathcal{C}(Y, X)$ gibt, sodass die Verknüpfungen die Identitäten sind, d.h. $\alpha \circ \beta = \text{id}_Y$ und $\beta \circ \alpha = \text{id}_X$.

Zwei isomorphe Objekte X, Y unterscheiden sich für den Kategorientheoretiker in keiner Hinsicht, d.h. konkret: für jedes weitere Objekt Z ist stets $\mathcal{C}(X, Z) \simeq \mathcal{C}(Y, Z)$ und $\mathcal{C}(Z, X) \simeq \mathcal{C}(Z, Y)$. Die Symbole " $\simeq$ " stehen für "bijektiv", d.h. es sind die gleichen Mengen, die Elemente (hier: Morphismen) haben vielleicht nur andere Namen.

Weitere Beispiele Es gibt noch viele weitere einfache, schöne und wichtige Beispiele, die wir hier aber noch nicht behandeln wollen, da man dazu Begriffe benötigt wie z.B. "Halbordnung, Monoid, Ordinalzahl, abzählbar, Verband, Graph", die wir noch nicht voraussetzen wollen.

Stattdessen wollen wir nun zu einem wichtigeren Begriff kommen, nämlich dem des Funktors. Ein Funktor ist so etwas wie eine "Abbildung zwischen Kategorien" und damit das sinnvoll ist, muss man also Objekte auf Objekte abbilden und Morphismen auf Morphismen. Das ganze soll

nun aber so sein, wie in der Literatur häufig mit dem Wort **funktoriell** bezeichnet wird, d.h. es soll mit der Verknüpfung von Morphismen verträglich sein und Identitäten erhalten. Warum und wie sich das auswirkt, das werden wir in den nachfolgenden Beispielen sehen.

2.2 Funktoren

Definition 3. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien. Ein **Funktor** F von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, auch als Pfeil geschrieben $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, ist eine Sammlung von Abbildungen: Zunächst gibt es eine **Objektabbildung** $F_{\text{Ob}} : \text{Ob}\mathcal{C} \rightarrow \text{Ob}\mathcal{D}$, die jedem Objekt von $\mathcal{C}$ ein Objekt von $\mathcal{D}$ zuweist. An diese Abbildung werden keine weiteren Bedingungen gestellt. Weiterhin gibt es für je zwei Objekte $X, Y \in \text{Ob}\mathcal{C}$ eine Morphismenabbildung $F_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(F_{\text{Ob}}(X), F_{\text{Ob}}(Y))$, die also einen Morphismus $f : X \rightarrow Y$ auf einen Morphismus $F_{X,Y}(f) : F_{\text{Ob}}(X) \rightarrow F_{\text{Ob}}(Y)$ abbildet. Man schreibt auch einfach $F_{X,Y} = F$ sowie $F_{\text{Ob}} = F$, da stets klar ist, was gemeint ist. An die Morphismenabbildung werden die folgenden Eigenschaften gefordert (Funktorialität):

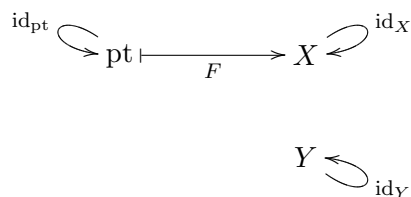
- $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$ für alle $X \in \text{Ob}\mathcal{C}$, d.h. Identitäten werden erhalten.
- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ für alle Morphismen f, g die man zu $f \circ g$ verknüpfen kann, d.h. Verknüpfung von Morphismen wird erhalten.

Bevor wir untersuchen, wie stark die Eigenschaften eines Funktors sind, wollen wir uns ein paar sehr einfache Beispiele ansehen.

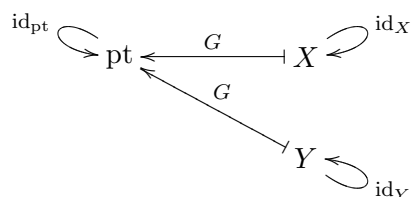
Beispiel 8. Sei $\mathcal{C} = 1$, die Kategorie mit nur einem Objekt und nur einem Morphismus und $\mathcal{D} = 2$, die Kategorie mit zwei Objekten und genau zwei Morphismen (den Identitäten). Dann definieren wir nun einen Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$: Auf Objekten setzen wir $F(\text{pt}) := X \in \text{Ob}\mathcal{D}$, d.h. das einzige Objekt der Kategorie 1 wird auf das eine der beiden Objekte der Kategorie 2 abgebildet. Aus Morphismen definieren wir $F_{\text{pt},\text{pt}} : F(\text{pt}) \rightarrow F(\text{pt})$ durch $F_{\text{pt},\text{pt}}(\text{id}_{\text{pt}}) := \text{id}_X \in \mathcal{D}(X, X)$. Dies ist tatsächlich ein Funktor, denn Identitäten werden auf Identitäten abgebildet und in der Kategorie 1 gibt es nichts zu verknüpfen.

Wir definieren einen Funktor in die andere Richtung, $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$: Auf Objekten setzen wir $G(X) := \text{pt} \in \text{Ob}\mathcal{C}$ sowie $G(Y) := \text{pt} \in \text{Ob}\mathcal{C}$ (wir haben ja auch keine andere Wahl). Auf Morphismen setzen wir $G(\text{id}_X) := \text{id}_{\text{pt}}$ sowie $G(\text{id}_Y) := \text{id}_{\text{pt}}$ (auch da haben wir keine andere Wahl). Das ist wiederum verträglich mit Identitäten und zu verknüpfen gibt es nichts.

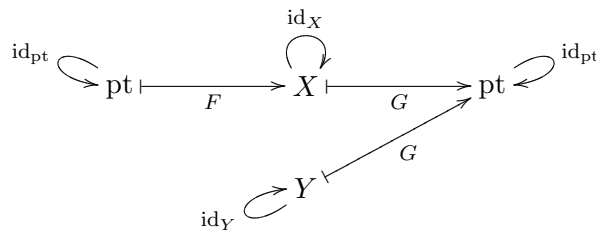
Wir können diese beiden Beispiele auch graphisch veranschaulichen. Zunächst F :



Und nun G :



Wir können uns die Hintereinanderausführung von Funktoren anschauen, so ist z.B. $G \circ F : 1 \rightarrow 1$:



also nichts anderes als



also dasselbe wie der Funktor $1 \rightarrow 1$, der alles auf sich selbst abbildet - der **identische Funktor** $\text{Id}_1 : 1 \rightarrow 1$. Mit anderen Worten: $G \circ F = \text{Id}_1$.

Definition 4. Die **Kategorie aller kleinen Kategorien** Cat ist definiert als $\text{Ob Cat} := \{\mathcal{C} \text{ Kategorie mit } \text{Ob } \mathcal{C} \text{ eine Menge}\}$ und $\text{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) := \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) := \{F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \text{ Funktor}\}$ mit der Hintereinanderausführung von Funktoren als Verknüpfung.

Lemma 1. Die Kategorie 1 ist final in Cat , d.h. es gibt für jede Kategorie $\mathcal{C}$ genau einen Morphismus nach 1 in Cat , d.h. es gibt für jede Kategorie $\mathcal{C}$ genau einen Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow 1$.

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, dass es überhaupt immer mindestens einen Funktor gibt. Dabei sehen wir dann aufgrund der Funktorialität, dass dieser schon vollständig festgelegt ist.

Definiere also $F : \mathcal{C} \rightarrow 1$ durch $F(X) := \text{pt}$ auf Objekten $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Eine andere Wahl haben wir nicht, denn $\text{Ob } 1 = \{\text{pt}\}$. Also müssen wir noch für $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ definieren, was mit einem $f : X \rightarrow Y$ geschehen soll. Es muss auf ein $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ abgebildet werden. Allerdings ist $F(X) = \text{pt} = F(Y)$, und in der Kategorie 1 gibt es nur einen Morphismus von pt nach pt , das ist die Identität $\text{id}_{\text{pt}} \in 1(\text{pt}, \text{pt})$. Also können wir nur definieren: $F(f) := \text{id}_{\text{pt}}$. Man sieht leicht, dass diese Abbildungen die Identitäten erhalten und mit Verknüpfungen verträglich sind (denn in der Kategorie 1 verknüpft man dabei immer nur id_{pt} mit sich selbst). Also ist dadurch ein Funktor definiert - und wir hatten auch gar keine andere Möglichkeit. $\square$

Quellen

- [AHS90] ADÁMEK, J. ; HERRLICH, H. ; STRECKER, G.E.: **Abstract and concrete categories**. John Wiley, 1990 <http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.pdf>
- [Bor94] BORCEUX, Francis: **Handbook of categorical algebra**. Cambridge, 1994
- [Mac71] MACLANE: **Categories for the working mathematician**. Springer, 1971. – 132 S.