

Matsumotos Satz und $\mathbb{A}^1$ -Homotopietheorie

Konrad Völkel

11. Juni 2011*

DIPLOMARBEIT

In dieser Arbeit wird die simpliziale Fundamentalgruppe π_1 der singulären Auflösung $\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1}$ einer einfach zusammenhängenden Chevalley-Gruppe $\mathbb{G}$ über einem perfekten Körper k präsentiert als K-Theorie:

$$\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{G})(k) \simeq \pi_1(\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}(k)) \xrightarrow{\sim} \begin{cases} K_2^{Sp}(k) & \text{falls } \mathbb{G} \text{ symplektisch,} \\ K_2^M(k) & \text{falls } \mathbb{G} \text{ nicht symplektisch.} \end{cases}$$

Schleifen in $\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}(k)$, die π_1 erzeugen, werden bis auf Homotopie explizit angegeben als gewisse Matrizen, deren Einträge Polynome sind.

Diese Arbeit wurde angefertigt unter Anleitung von Dr. Matthias Wendt
unter Aufsicht von Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
an der Fakultät für Mathematik und Physik der
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau

*Dies ist eine geringfügig korrigierte Version vom 9. August 2011.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. K-Theorie und Gruppenkohomologie	5
2.1. Gruppenerweiterungen	5
2.2. Universelle zentrale Erweiterungen	11
2.3. K-Theorie	14
2.4. Symplektische K-Theorie	16
3. Chevalley-Gruppen	21
3.1. Reduktive lineare algebraische Gruppen	21
3.2. Weylgruppen	22
3.3. Elementare Untergruppe und derivierte Untergruppe	25
3.4. Chevalley-Gruppen und K-Theorie	25
3.5. Äußere Automorphismen von Wurzelsystemen	28
4. Matsumotos Satz	31
4.1. Der Satz von Matsumoto	31
4.2. Zur Geschichte des Satzes	34
4.3. Matsumotos Beweis	35
4.3.1. Rechenregeln für Lifts $\tilde{x}_\alpha$, $\tilde{h}_\alpha$, $\tilde{w}_\alpha$ und Kozykel c_α	35
4.3.2. Die zentrale Erweiterung des Torus	44
4.3.3. Eine zyklische Erweiterung von N und Operationen auf $\tilde{H}$	45
4.3.4. Die zentrale Erweiterung des Normalisators	49
4.3.5. Die zentrale Erweiterung der Gruppe $\mathbb{G}(k)$	50
4.3.6. Reduktion auf den Fall G von Rang 1 oder 2	51
4.3.7. Der Fall G von Rang 1 oder 2	56
5. Abstrakte Homotopietheorie	63
5.1. Modellkategorien	63
5.2. Simpliciale Objekte	66
5.3. Simpliciale Gruppen	69
5.4. Fasersequenzen	70

6. Singuläre Auflösung von Chevalley-Gruppen	75
6.1. Singuläre Auflösung von algebraischen Gruppen	75
6.2. Singuläre Auflösung der Steinberggruppe	78
6.3. Über Homotopieinvarianz instabiler K-Theorie	79
6.4. Whiteheads Lemma	81
6.5. Ausgezeichnete Schleifen	83
6.6. Relationen für ausgezeichnete Schleifen	85
6.7. Die Faser über dem Basispunkt	93
7. Motivische Homotopietheorie	95
7.1. Einführung	95
7.2. Die affine Brown-Gersten-Eigenschaft	96
7.3. $\mathbb{A}^1$ -Fundamentalgruppen von Chevalley-Gruppen	98
7.4. Die Steinberg-Relation	99
8. Zusammenfassung und Ausblick	101
A. Anhang	103
A.1. Dynkin-Diagramme von Rang ≤ 2	103
A.2. Wurzelsysteme von Rang 2	104
A.3. Der Fall $\mathbb{G} = \mathrm{SL}_2$	106
A.4. Der Fall $\mathbb{G} = \mathrm{SL}_3$	106
A.5. Die Weylgruppen von A_1 , A_2 und C_2	107
B. Notationsindex	108
Literatur	111

1. Einleitung

Matrizengruppen über den reellen oder komplexen Zahlen sind topologische Gruppen und ihre Fundamentalgruppen sind interessante Invarianten. Während die Fundamentalgruppe über stetige Schleifen am Basispunkt und Homotopien definiert ist, können wir uns fragen, welche Gruppe man erhält, wenn man nur polynomiale Schleifen am Basispunkt und polynomiale Homotopien zulässt. Während die Fundamentalgruppe eine Klassifikation der Überlagerungen erlaubt, so erhalten wir durch die "polynomiale Fundamentalgruppe" eine Klassifikation der zentralen Gruppenerweiterungen - ein homologiethoretisches Analogon von Überlagerungen.

Für eine Überlagerung $\tilde{X} \rightarrow X$ mit Faser F über dem Basispunkt und punktiertem Schleifenraum ΩX gibt es eine Liftungsabbildung $L : \Omega X \rightarrow F$, die im Fall einer topologischen Gruppe $X = G$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Ist $\tilde{X}$ die universelle Überlagerung, so liefert L unter π_0 einen Isomorphismus $\pi_1(X, *) \xrightarrow{\sim} F$. Jede Überlagerung topologischer Gruppen ist auch eine zentrale Erweiterung - jedoch nicht umgekehrt. Die zentralen Erweiterungen einer perfekten Gruppe G werden klassifiziert durch den Schur-Multiplikator $H_2(G, \mathbb{Z})$; das ist der Kern der universellen zentralen Erweiterung. Wir betrachten den Fall $\tilde{X} = \mathbb{G}(k)$, wobei $\mathbb{G}(k)$ die k -rationalen Punkte einer einfach zusammenhängenden Chevalley-Gruppe $\mathbb{G}$ mit Wurzelsystem Φ für einen unendlichen Körper k ist. Dann ist der Schur-Multiplikator $H_2(\mathbb{G}(k), \mathbb{Z}) =: K_2(\Phi, k)$, die zweite instabile K-Theorie bezüglich Φ und die universelle zentrale Erweiterung ist die Steinberg-Gruppe $\text{St}(\Phi, k)$.

Wir definieren eine simpliziale Gruppe $\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}(k)$, deren n -Simplizes genau die Matrizen aus $\mathbb{G}(k[t_1, \dots, t_n])$ sind und zeigen, dass ihre simpliziale Fundamentalgruppe genau die instabile K-Theorie ist, indem wir (unter einer gewissen Regularitätsvoraussetzung an $K_2(\Phi, k)$) die simpliziale Überlagerung

$$K_2(\Phi, k) \hookrightarrow \text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \text{St}(\Phi, k) \twoheadrightarrow \text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}(k)$$

und ihren Liftungshomomorphismus L studieren. Wir geben eine explizite Umkehrabbildung zu L an und können somit alle Schleifen in $\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}(k)$ bis auf Homotopie explizit beschreiben.

Die genannte Regularitätsvoraussetzung ist Homotopieinvarianz von $K_2(\Phi, \cdot)$ in einer Variablen über einem Körper k , d.h.

$$K_2(\Phi, k[t]) \simeq K_2(\Phi, k).$$

Für $\Phi = A_n$ mit $n \geq 3$ ist die Aussage bereits durch Sätze von Quillen und van der Kallen bekannt. Für $\text{rk } \Phi \geq 3$ ist dies eine Vermutung von Wendt.

Wir arbeiten mit der Steinberg-Präsentation der universellen zentralen Erweiterung $\text{St}(\Phi, k)$ von $\mathbb{G}(k)$ und mit der Matsumoto-Präsentation ihres Kerns, der instabilen zweiten K-Theorie von k :

$$K_2(\Phi, k) \simeq \begin{cases} K_2^{\text{Sp}}(k), & \text{falls } \Phi \text{ symplektisch,} \\ K_2^{\text{M}}(k) & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Einleitung

Matsumotos Beweis dieser Präsentation wird in dieser Arbeit ausführlich nachgerechnet. Die Ergebnisse über die Fundamentalgruppe von $\mathrm{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}(k)$ liefern eine Verallgemeinerung eines Satzes von Jardine auf instabile K-Theorie und unendliche Körper, die nicht notwendig algebraisch abgeschlossen sind:

$$\pi_1(\mathrm{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}(k)) \simeq K_2(\Phi, k)$$

Unter Verwendung von Resultaten von Morel und Wendt

$$\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{G})(k) \simeq \pi_1(\mathrm{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}(k))$$

erhalten wir schließlich eine Aussage über $\pi_1^{\mathbb{A}^1}$, die motivische Fundamentalgruppe im Sinne von Morel und Voevodsky.

Damit ist die ursprüngliche Fragestellung der Arbeit beantwortet:

“Wie sehen die Schleifen in der $\mathbb{A}^1$ -Homotopietheorie von $\mathbb{G}(k)$ aus?”

Der Beweis wird geführt, indem zunächst über ein Fasersequenzen-Argument hergeleitet wird, dass die Liftungsabbildung $L : \pi_1(\mathrm{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}(k)) \xrightarrow{\sim} K_2(k)$ ein Isomorphismus ist (hier geht die Homotopieinvarianz von instabilem K_2 in einer Variablen ein). Dann wird eine Schleifenabbildung $C : k^{\times} \times k^{\times} \rightarrow \Omega \mathrm{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}(k)$ definiert, die bis auf Homotopie über $K_2^M(k)$ (bzw. für symplektisches $\mathbb{G}$ über $K_2^{Sp}(k)$) faktorisiert. Diese Abbildung ist invers zu L , wobei wir, um die Abbildung $C : K_2^M(k) \rightarrow \pi_1(\mathrm{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}(k))$ als Inverse zu $L : \pi_1(\mathrm{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}(k)) \xrightarrow{\sim} K_2(k)$ aufzufassen, den Satz von Matsumoto verwenden. Für die Faktorisierung der Abbildung C sind Relationen in $\Omega \mathrm{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}(k)$ bis auf Homotopie nachzurechnen, wozu vor allem ein homotopietheoretisches Analogon von Chevalleys Kommutatorformel notwendig ist. Durch die Identifikation von $\pi_1(\mathrm{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}(k))$ mit $\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{G})(k)$ aufgrund der affinen Brown-Gersten-Eigenschaft von $\mathrm{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}$ lässt sich die Steinberg-Relation in $K_2^M(k)$ bzw. in $K_2^{Sp}(k)$ innerhalb der $\mathbb{A}^1$ -Homotopietheorie zeigen, was ein allgemeines Argument von Hu und Kriz verwendet.

Struktur der Arbeit

Im zweiten Kapitel werden Gruppenhomologie, Kohomologie und der Zusammenhang mit Gruppenerweiterungen und K-Theorie kurz vorgestellt, um den Einstieg in Aussage und Beweis des Satzes von Matsumoto zu erleichtern. Im dritten Kapitel werden einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppen definiert und eine Präsentation für die k -rationalen Punkte über einem Körper k vorgestellt. Ziel der Kapitel zwei und drei ist die Definition der Steinberggruppe und der instabilen K-Theorie zu einem Wurzelsystem in Definition 3.31.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit dem Satz von Matsumoto und seinem Beweis, für den die ersten drei Kapitel Voraussetzung sind. Der Beweis des Satzes ist ausführlicher ausgearbeitet als im ursprünglichen Artikel von Matsumoto und kann somit als Hilfe zum Verständnis dienen. Auf der anderen Seite ist das Studium des Beweises für das erste Verständnis der restlichen Arbeit nicht zwingend erforderlich. An einigen späteren Textstellen wird auf einzelne Passagen des Beweises hingewiesen,

diese sind dann besonders ausführlich gehalten, um den Quereinstieg zu ermöglichen. Es ist möglich, das vierte Kapitel zu lesen, ohne die folgenden Kapitel zu beachten.

Im fünften Kapitel werden kurz die benötigten Grundlagen über abstrakte Homotopietheorie (Modellkategorien, simpliziale Gruppen, Fasersequenzen) gesammelt. Diese Begriffe werden in den nachfolgenden Kapiteln benötigt.

Das sechste Kapitel ist der Hauptteil der Arbeit. Hier werden die singuläre Auflösung einer einfach zusammenhängenden Chevalley-Gruppe und ihrer Steinberggruppe studiert und die simpliziale Fundamentalgruppe präsentiert.

Im siebten Kapitel wird kurz die affine Brown-Gersten-Eigenschaft erläutert und damit der Zusammenhang zur motivischen Homotopietheorie hergestellt, der die ursprüngliche Motivation für die angestellten Untersuchungen war. Ein kurzer Ausblick skizziert, was wir getan haben und wie sich die Untersuchungen möglicherweise verallgemeinern ließen. Im Anhang sind als Referenz für den Beweis des Satzes von Matsumoto die betrachteten Wurzelsysteme (und Dynkindiagramme) von Rang 1 und 2 dargestellt, zur Anschauung eine Übersetzung der Steinberg-Präsentation von SL_2 und SL_3 in Matrizen und schließlich eine explizite Berechnung der Weylgruppen bestimmter Wurzelsysteme, die im Beweis des Satzes von Matsumoto verwendet werden.

Es gibt einen Notationsindex auf S. 108, dort findet sich auch eine Zusammenstellung der verwendeten Konventionen, auf die im Text aber auch jeweils hingewiesen wird.

Inhaltlich neu sind in dieser Arbeit, dem besten Wissen des Autors nach, nur Kapitel 6 und die ausführliche Ausarbeitung von Matsumotos Beweis in Abschnitt 4.3. In der Behandlung von Steinberg-Kozykeln haben wir einige Beweise mit Kozykeln in K -theoretische Beweise übersetzt und damit Rechnungen übersichtlicher strukturiert.

Wenn ein Beweis weggelassen wurde (z.B. weil Literatur zitiert wurde, oder weil die Beweisidee klar ist), ist dies mit einem Diamanten ($\diamond$) markiert, das Ende eines Beweises mit einem Quadrat ($\square$).

Der Textsatz wurde mit $\text{\LaTeX}$, die Grafiken mit TikZ/PGF erstellt. Die Grafiken sind hiermit unter der “Creative Commons Namensnennung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Unported” Lizenz zur Verfügung gestellt.

Danksagung

Mein herzlicher Dank gilt vor allem meinem Betreuer Dr. Matthias Wendt, von dem die Idee zu dieser Arbeit stammt, der nie müde wurde unzählige Fragen zu diskutieren und ohne den diese Arbeit mir nicht halb so viel Spaß gemacht hätte.

Meinen Eltern danke ich für ihre vertrauensvolle Unterstützung. Für Korrekturlesen bedanke ich mich bei Matthias Wendt, Annette Huber und Jan Schlüter. Der Freiburger Mathematik-Fachschaft und besonders Lotta Koch gilt auch mein Dank für eine sehr schöne Zeit.

Ich war während des Studiums Stipendiat der Studienstiftung des deutschen Volkes.

2. K-Theorie und Gruppenkohomologie

2.1. Gruppenerweiterungen

Sei in diesem Abschnitt G eine beliebige Gruppe. Wir nennen eine abelsche Gruppe A mit G -Linksoperation einen G -Modul und notieren die Operation von $g \in G$ auf $a \in A$ mit $g.a$. Wir notieren Gruppen, wenn nicht anders angegeben, multiplikativ mit neutralem Element 1.

Definition 2.1. Eine *Gruppenerweiterung* E einer Gruppe G durch eine abelsche Gruppe A ist eine kurze exakte Sequenz

$$A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$$

mit einer Gruppe E . Ein *Morphismus von Gruppenerweiterungen* $\varphi : E \rightarrow E'$ ist ein kommutierendes Diagramm von Gruppenhomomorphismen:

$$\begin{array}{ccccc} A & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & G \\ \downarrow \varphi|_A & & \downarrow \varphi & & \downarrow \text{id} \\ A' & \hookrightarrow & E' & \twoheadrightarrow & G \end{array}$$

Die Kategorie aller Erweiterungen einer Gruppe G wollen wir $\text{Ext}^1(G, \cdot)$ nennen.

Die *Baer-Summe* von Gruppenerweiterungen $A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$ und $A \hookrightarrow E' \twoheadrightarrow G$ ist definiert als Quotient des Faserprodukts von $E \rightarrow G$ mit $E' \rightarrow G$, bei dem beide Kopien von A miteinander identifiziert werden:

$$E \oplus^{\text{Baer}} E' := (E \times_G E') / \langle ((1_E a, 1_{E'}) - (1_E, a 1_{E'})) \rangle,$$

wobei wir mit $\langle \dots \rangle$ den erzeugten Normalteiler bezeichnen. Damit ist $E \oplus^{\text{Baer}} E'$ wieder eine Gruppe. Wir bemerken noch, dass es bei zentralen Erweiterungen E, E' auch möglich ist, die Relation $(ea, e') \sim (e, ae')$ heraus zu teilen, wie in der Literatur üblich. Bei nicht-zentralen Erweiterungen ist der davon erzeugte Normalteiler allerdings zu groß.

Diese Definitionen lassen sich verallgemeinern auf n -fache Yoneda-Erweiterungen, die wir hier aber nicht benötigen.

Bemerkung 2.2. In Definition 2.1 tritt eine Schwierigkeit auf, die wir besonders hervorheben wollen: Während A eine abelsche Gruppe ist, die wir auch zumeist additiv notieren werden, sind G und E keineswegs als abelsch vorausgesetzt, werden dementsprechend auch multiplikativ geschrieben. Über den Monomorphismus $A \hookrightarrow E$ einer Erweiterung E von G durch A können wir die Elemente von A als Elemente von E auffassen und werden sie dann multiplikativ schreiben. Von dieser Konvention gibt es eine wichtige Ausnahme: Wenn die Elemente von A sämtlich mit denen von E kommutieren, so wird in der Literatur gelegentlich eine gemischt multiplikativ-additive Notation verwendet.

2. K-Theorie und Gruppenkohomologie

Proposition 2.3. *Jeder Erweiterung $A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$ ordnen wir auf A eine induzierte G -Modul-Struktur zu, indem $G = E/A$ durch Konjugation auf A operiert:*

$g.a := s(g)as(g)^{-1}$, wobei s ein mengentheoretischer Schnitt ist. Das definiert einen Funktor von $\text{Ext}^1(G, \cdot)$ in die Kategorie der G -Moduln, wenn wir einem Morphismus von Erweiterungen $\varphi : E \rightarrow E'$ den Morphismus $\varphi|_A : A \rightarrow A'$ zuordnen.

Die Faser dieses Funktors über einem vorgegebenen G -Modul A ist die Kategorie mit Objekten $A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$ sodass die induzierte G -Operation auf A mit der vorgegebenen übereinstimmt. Morphismen φ von $A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$ nach $A \hookrightarrow E' \twoheadrightarrow G$ in der Faser sind somit genau die Morphismen $\varphi : E \rightarrow E'$, die mit der Identität von G kommutieren und auf A eingeschränkt G -äquivariant sind.

Beweis. Wählen wir zwei mengentheoretische Schnitte $s, s' : G \rightarrow E$, so stimmen $g.a = s(g)as(g)^{-1}$ und $s'(g)as'(g)^{-1}$ überein, da $s(g)s'(g)^{-1}$ unter $E \twoheadrightarrow G$ auf 1 abgebildet wird, also in der abelschen Gruppe A liegt, in der jede Konjugation mit Elementen aus A trivial operiert. Für die Funktorialität der Konstruktion ist noch nachzuweisen, dass $\varphi|_A : A \rightarrow A'$ ein G -äquivarianter Homomorphismus ist. Es ist aber für einen mengentheoretischen Schnitt $s : G \rightarrow E$ auch $\varphi \circ s : G \rightarrow E'$ ein mengentheoretischer Schnitt und da φ ein Homomorphismus ist, rechnen wir nach:

$$\varphi|_A(g.a) = \varphi|_A(s(g)as(g)^{-1}) = \varphi(s(g))\varphi(a)\varphi(s(g))^{-1} = g.\varphi(a). \quad \square$$

Definition 2.4. Wir wollen die Faser des Funktors $\text{Ext}^1(G, \cdot) \rightarrow G\text{-Mod}$ aus Proposition 2.3 über einem gegebenen G -Modul A mit $\text{Ext}^1(G, A)$ bezeichnen.

Proposition 2.5. *Gegeben ein Isomorphismus $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Ext}^1(G, A)}(E, E')$, so gibt es auch einen Gruppenisomorphismus $\psi : E \rightarrow E'$, der auf A eingeschränkt die Identität ist und mit der Identität auf G kommutiert.*

Beweis. Wir konstruieren aus der Erweiterung $A \hookrightarrow E' \twoheadrightarrow G$ und dem Gruppenhomomorphismus $\varphi : E \rightarrow E'$ eine neue Erweiterung $A \hookrightarrow E' \twoheadrightarrow G$, wobei wir $E' \twoheadrightarrow G$ wie zuvor belassen und $A \hookrightarrow E'$ über die Komposition $A \hookrightarrow E \xrightarrow{\varphi} E'$ definieren. Damit ist die Einschränkung von $\varphi : E \rightarrow E'$ auf A offensichtlich eine Abbildung $\varphi : A \rightarrow E'$, die ein $a \in A$ auf dasselbe Element abbildet wie der Monomorphismus $A \hookrightarrow E'$. Dabei haben wir benutzt, dass φ ein Isomorphismus ist. Um den Beweis vollständig zu machen, definieren wir noch $\psi := \varphi$. $\square$

Damit stimmt unser Isomorphiebegriff in $\text{Ext}^1(G, A)$ also überein mit dem etwas artifiziellen Begriff der *Äquivalenz von Erweiterungen* aus [Wei95, 6.6.2, S. 183].

Definition 2.6. Eine *zentrale Erweiterung* von G durch A ist eine Erweiterung E sodass A mit $A \hookrightarrow E$ ins Zentrum von E abgebildet wird. Die induzierte G -Linksoperation auf A durch Konjugation in E ist dann notwendig trivial.

Bemerkung 2.7. Für G -Moduln A lässt sich der Funktor der G -Invarianten $A \mapsto A^G$ als kovarianter, linksexakter Hom-Funktor der Kategorie $\mathbb{Z}[G]\text{-Mod}$ auffassen:

$$A^G = \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A).$$

Den n -ten Rechtsderivierten $R^n \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \cdot)$ bezeichnet man als $\text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^n(\mathbb{Z}; \cdot)$ oder auch als $H^n(G; \cdot)$, die n -te Gruppenkohomologie. Der Funktor $\text{Ab} \rightarrow G\text{-Mod}$, der eine abelsche Gruppe mit einer trivialen G -Operation ausstattet, ist linksadjungiert zum Funktor der G -Invarianten.

Wir können den zweiten Rechtsderivierten, also $H^2(G; A)$, mit der normalisierten Bar-Auflösung (siehe [Wei95, Application 6.5.5, S. 179]) explizit berechnen:

Definition 2.8. Sei A ein G -Modul. Ein *normalisierter 2-Kozykel* ist eine Abbildung $c : G \times G \rightarrow A$, sodass für alle $f, g, h \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} c(g, 1) &= c(1, g) = 0, \\ f.c(g, h) - c(fg, h) + c(f, gh) - c(f, g) &= 0. \end{aligned}$$

Die erste Eigenschaft ist die *Normalisiertheit*, die zweite *verschwindendes Differential*.

Ein normalisierter 2-Kozykel c heißt *normalisierter 2-Korand*, wenn es eine Abbildung $\alpha : G \rightarrow A$ mit $\alpha(1) = 0$ (normalisiert) gibt, sodass

$$c(g, h) = g.\alpha(h) - \alpha(gh) + \alpha(g).$$

Unterscheiden sich zwei Kozykel c, c' nur um einen Korand, d.h. $c - c'$ ist ein 2-Korand, so heißen c und c' *kohomolog*. Die abelsche Gruppe aller 2-Kozykel $Z^2(G, A)$ modulo der Untergruppe aller 2-Koränder $B^2(G, A)$ ist die zweite Gruppenkohomologie

$$H^2(G, A) = Z^2(G, A) / B^2(G, A).$$

Satz 2.9. Sei G eine Gruppe und A ein G -Modul. Dann klassifiziert $H^2(G; A)$ die Isomorphieklassen in $\text{Ext}^1(G, A)$ und die Gruppenstruktur auf der Kohomologie entspricht der Baer-Summe von Erweiterungen, d.h. jeder Erweiterung in $\text{Ext}^1(G, A)$ lässt sich ein Element in $H^2(G; A)$ zuordnen, sodass jedes Element von $H^2(G; A)$ zu genau einer Isomorphieklasse korrespondiert. Damit bilden die Isomorphieklassen in $\text{Ext}^1(G; A)$ eine Menge. Insbesondere klassifiziert $H^2(G; A)$ für einen trivialen G -Modul A genau die Isomorphieklassen der zentralen Erweiterungen von G durch A .

Wir werden diesen Satz in drei Propositionen beweisen, da wir die dazu verwendeten Konstruktionen später im Beweis von Matsumotos Satz wiedersehen werden.

Definition 2.10. Sei A ein G -Modul und c ein normalisierter 2-Kozykel. Dann definiert c eine Erweiterungen von G durch A als die Menge $A \rtimes^c G := A \times G$ mit der Multiplikation

$$(a, g) \cdot (b, h) := (a + g.b + c(g, h), gh).$$

Ist die G -Operation auf A trivial, so reduziert sich das auf $(a + b + c(g, h), gh)$. Ist der Kozykel trivial (konstant $0 \in A$), so reduziert sich das auf das semidirekte Produkt $A \rtimes G$. Eine Erweiterung von G durch A heißt *split*, wenn sie zum semidirekten Produkt isomorph ist. Wir bezeichnen mit $A \rtimes^c G$ sowohl die Gruppe, die wir soeben definiert haben, als auch die Erweiterung

$$A \hookrightarrow A \rtimes^c G \twoheadrightarrow G$$

2. K-Theorie und Gruppenkohomologie

mit den offensichtlichen Abbildungen $a \mapsto (a, 1)$ bzw. $(a, g) \mapsto g$ und nennen beides *getwistetes semidirektes Produkt*. Man beachte, dass die Notation $\rtimes^c$ für das getwistete Produkt leicht verwechselt werden kann mit dem ungetwisteten semidirekten Produkt $\rtimes_\varphi$, wenn φ eine Gruppenoperation bezeichnet.

Proposition 2.11. *Die in Definition 2.10 definierte binäre Operation $\cdot$ auf $A \rtimes^c G$ erfüllt tatsächlich die Gruppenaxiome.*

Beweis. Seien $a, b, d \in A$ und $f, g, h \in G$ beliebig. Die Paare $(a + g.b + c(g, h), gh)$ sind Elemente der Menge $A \times G$, da $a, g.b, c(g, h) \in A$ und $gh \in G$ liegen. Die Verknüpfung $\cdot$ ist assoziativ, denn

$$(a, g) \cdot ((b, h) \cdot (d, f)) = (a + g.b + gh.d + g.c(h, f) + c(g, hf), ghf),$$

$$((a, g) \cdot (b, h)) \cdot (d, f) = (a + g.b + c(g, h) + gh.d + c(gh, f), ghf)$$

und mit dem Kozykel-Axiom $g.c(h, f) - c(gh, f) + c(g, hf) - c(g, h) = 0$ folgt die Gleichheit der beiden rechten Terme. Das neutrale Element in $A \rtimes^c G$ ist $(0, 1)$, denn mit der Normiertheit von 2-Kozykeln folgt

$$(a, g) \cdot (0, 1) = (a + g.0 + c(g, 1), g1) = (a, g),$$

$$(0, 1) \cdot (a, g) = (0 + 1.a + c(1, g), 1g) = (a, g).$$

Das Inverse von (a, g) ist gegeben durch $(-g^{-1}.a - g^{-1}.c(g, g^{-1}), g^{-1})$, denn

$$(a, g) \cdot (-g^{-1}.a - g^{-1}.c(g, g^{-1}), g^{-1}) = (0, 1),$$

$$(-g^{-1}.a - g^{-1}.c(g, g^{-1}), g^{-1}) \cdot (a, g) = (-g^{-1}.c(g, g^{-1}) + c(g^{-1}, g), 1) = (0, 1),$$

wobei wir noch $g^{-1}.c(g, g^{-1}) = c(g^{-1}, g)$ benutzt haben, was aus dem Axiom “verschwindendes Differential” folgt. $\square$

Proposition 2.12. *Sei $A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$ eine Erweiterung und $s : G \rightarrow E$ ein punktierter mengentheoretischer Schnitt, d.h. eine Abbildung $G \rightarrow E$, die die Identität auf die Identität abbildet. Dann definiert $c(g, h) := s(g)s(h)s(gh)^{-1}$ einen normalisierten 2-Kozykel.*

Die durch c definierte Erweiterung $A \hookrightarrow A \rtimes^c G \twoheadrightarrow G$ ist isomorph zu $A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$ und der mengentheoretische Schnitt $s' : G \rightarrow A \rtimes^c G$, $g \mapsto (0, g)$ liefert den ursprünglichen Kozykel c zurück.

Beweis. Die Abbildung $E \twoheadrightarrow G$ bildet das Produkt $s(g)s(h)s(gh)^{-1}$ auf $gh(gh)^{-1} = 1$ ab, wegen Exaktheit von $A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$ liegt es also schon in A . Die Normalisierung ist durch die Forderung $s(1) = 1$ erfüllt und die Bedingung vom verschwindenden Differential rechnet man in E nach:

Für alle $f, g, h \in G$ gilt

$$\begin{aligned}
 & (f \cdot c(g, h)) \cdot c(f, gh) \cdot c(fg, h)^{-1} \cdot c(f, g)^{-1} \\
 &= s(f)s(g)s(h)s(gh)^{-1}s(f)^{-1} \\
 & \quad \cdot s(f)s(gh)s(fgh)^{-1} \\
 & \quad \cdot s(fgh)s(h)^{-1}s(fg)^{-1} \\
 & \quad \cdot s(fg)s(g)^{-1}s(f)^{-1} \\
 &= s(f)s(g)s(h)s(gh)^{-1}s(gh)s(h)^{-1}s(g)^{-1}s(f)^{-1} \\
 &= s(f)s(g)s(h)s(h)^{-1}s(g)^{-1}s(f)^{-1} = 1.
 \end{aligned}$$

Die Abbildung $\varphi : A \rtimes^c G \rightarrow E$ definiert man über $s : G \rightarrow E$ und $A \hookrightarrow E$ als $\varphi : (a, g) \mapsto as(g)$. Diese Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus:

$$\begin{aligned}
 \varphi((a, g)(b, h)) &= \varphi(a + g \cdot b + c(g, h), gh) \\
 &= as(g)bs(g)^{-1}s(g)s(h)s(gh)^{-1}s(gh) \\
 &= as(g)bs(h) \\
 &= \varphi(a, g)\varphi(b, h)
 \end{aligned}$$

und damit offensichtlich ein Morphismus von Erweiterungen.

Die Abbildung φ ist injektiv, da für $as(g)s(h)^{-1}b^{-1} = 1$ durch $E \twoheadrightarrow G$ schon $gh^{-1} = 1$, also $h = g$ folgt, dann $ab^{-1} = as(g)s(g)^{-1}b = 1$, also $a = b$. Zuletzt ist φ surjektiv, da jedes Element $e \in E$ sich von $s(\pi(e))$ nur um ein Element aus A unterscheidet, also als $e = as(\pi(e))$ geschrieben werden kann. $\square$

Proposition 2.13. *Die 2-Kozykel zu zwei verschiedenen punktierten mengentheoretischen Schnitten $s : G \rightarrow E$ sind kohomolog. Sind umgekehrt zwei 2-Kozykel c, c' kohomolog, so gibt es einen punktierten mengentheoretischen Schnitt $s' : G \rightarrow A \rtimes^c G$, sodass $c'(g, h) = s'(g)s'(h)s'(gh)^{-1}$. Zwei Kozykel c, c' sind gleich, genau dann wenn es einen Gruppenisomorphismus $A \rtimes^c G \xrightarrow{\sim} A \rtimes^{c'} G$ gibt, der mit den Identitäten auf A und G verträglich ist.*

Beweis. Sind s und s' zwei mengentheoretische Schnitte $G \rightarrow E$ der Erweiterung $A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$ mit $s(1) = s'(1) = \text{id}_E$, so gibt es für jedes $g \in G$ ein $\beta(g) \in A$ mit $s(g) = \beta(g)s'(g)$. Es ist $\beta(g) - \beta(gh) + g \cdot \beta(h) = c'(g, h) - c(g, h)$, wobei c und c' die 2-Kozykel zu den Schnitten s und s' bezeichnen.

Seien nun c, c' kohomolog, also $c(g, h) - c'(g, h) = g \cdot \alpha(h) - \alpha(gh) + \alpha(g)$ für eine punktierte Abbildung $\alpha : G \rightarrow A$. Der Schnitt $s' : G \rightarrow A \rtimes^c G$, $g \mapsto (-\alpha(g), g)$ liefert

$$\begin{aligned}
 & s'(g)s'(h)s'(gh)^{-1} \\
 &= (-\alpha(g), g)(-\alpha(h), h)(-\alpha(gh), gh)^{-1} \\
 &= (-\alpha(g) - g \cdot \alpha(h) + c(g, h), gh)((gh)^{-1} \cdot \alpha(gh), (gh)^{-1}) \\
 &= (c(g, h) - (g \cdot \alpha(h) - \alpha(gh) + \alpha(g)) + c(gh, (gh)^{-1}), gh(gh)^{-1}) \\
 &= (c'(g, h), 1).
 \end{aligned}$$

2. K-Theorie und Gruppenkohomologie

Jetzt wollen wir noch die letzte Aussage zeigen. Die zugrunde liegende Menge ist bei beiden getwisteten Produkten $A \rtimes G$ und die bijektive Abbildung $\varphi : A \rtimes^c G \rightarrow A \rtimes^{c'} G$, $(a, g) \mapsto (a + \alpha(g), g)$ ist ein Gruppenisomorphismus:

$$\begin{aligned}
 & \varphi((a, g)(b, h)) \\
 (\text{Definition der Multiplikation}) &= \varphi(a + g.b + c(g, h), gh) \\
 (\text{Definition von } \alpha) &= \varphi(a + g.b + c'(g, h) + g.\alpha(h) - \alpha(gh) + \alpha(g), gh) \\
 (\text{Definition von } \varphi) &= (a + \alpha(g) + g.b + g.\alpha(h) + c'(g, h), gh) \\
 (\text{Definition der Multiplikation}) &= (a + \alpha(g), g)(b + \alpha(h), h) \\
 (\text{Definition von } \varphi) &= \varphi(a, g)\varphi(b, h).
 \end{aligned}$$

Ein Isomorphismus $A \rtimes^c G \xrightarrow{\sim} A \rtimes^{c'} G$, der mit den Identitäten auf A und G verträglich ist, ist wegen $(a, g) = (a, 1)(0, g)$ bereits auf den Mengen $A \times 1$ und $0 \times G$ eindeutig festgelegt durch $\varphi(a, 1) = (a, 1)$ und $\varphi(0, g) = (0, g)$. Also ist α konstant 0 und φ die Identität auf $A \times G$, somit stimmen die Gruppenstrukturen überein und damit die Kozykel c und c' . $\square$

Nun haben wir die nötigen Informationen für den abschließenden

Beweis von Satz 2.9. Wir bezeichnen mit $\text{Ext}^1(G, A)/\sim$ die Klasse der Isomorphieklassen in $\text{Ext}^1(G, A)$. Die Zuordnung $Z^2(G, A) \rightarrow \text{Ext}^1(G, A)/\sim$, die jedem Kozykel c die Isomorphieklasse der Erweiterung $A \rtimes^c G$ zuordnet, ist surjektiv, da wir nach Proposition 2.12 zu jeder Erweiterung einen Kozykel finden, der eine isomorphe Erweiterung definiert. Die Zuordnung hat den Kern (also Urbild der Klasse der trivialen Erweiterung) $B^2(G, A)$, denn nach Proposition 2.13 sind zwei Erweiterungen isomorph genau dann, wenn sie kohomologe Kozykel haben. Die Zuordnung faktorisiert also über eine bijektive Abbildung $H^2(G, A) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}^1(G, A)/\sim$. Insbesondere ist $\text{Ext}^1(G, A)/\sim$ eine Menge.

Um zu sehen, dass die Gruppenstruktur auf $H^2(G, A)$ der Baer-Summe von Erweiterungen entspricht, betrachten wir punktierte mengentheoretische Schnitte $s : G \rightarrow E$ und $s' : G \rightarrow E'$ von Erweiterungen E, E' , dazu gehörige Kozykel c, c' und berechnen den Kozykel der Baer-Summe $E \oplus^{\text{Baer}} E'$ über den punktierten mengentheoretischen Schnitt $\sigma : G \rightarrow E \oplus^{\text{Baer}} E'$, $g \mapsto [s(g), s'(g)]$ als $(g, h) \mapsto [c(g, h), c'(g, h)] = c(g, h) + c'(g, h) \in A$. Analog definiert jeder Kozykel der Form $c + c'$ eine Erweiterung, die isomorph zur Baer-Summe der Erweiterungen $A \rtimes^c G$ und $A \rtimes^{c'} G$ ist. Also ist $H^2(G, A) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}^1(G, A)/\sim$ ein Gruppenisomorphismus. $\square$

Das folgende Lemma werden wir später noch in Abschnitt 4.3 benötigen.

Lemma 2.14. *Ist G eine abelsche Gruppe, so ist eine Erweiterung E abelsch genau dann, wenn für einen zugehörigen Kozykel c gilt: $c(x, y) = c(y, x)$.*

Beweis. Es ist $E \simeq A \rtimes^c G$ in $\text{Ext}^1(G, A)$ und die Multiplikation in $A \rtimes^c G$ erfüllt dann

$$\begin{aligned}
 (a, g)(b, h) &= (a + b + c(g, h), gh), \\
 (b, h)(a, g) &= (b + a + c(h, g), hg),
 \end{aligned}$$

also ist $(a, g)(b, h) = (b, h)(a, g)$ genau dann, wenn $c(g, h) = c(h, g)$. $\square$

2.2. Universelle zentrale Erweiterungen

Definition 2.15. Sei G eine Gruppe. Die derivierte Gruppe $D(G) := [G, G] \trianglelefteq G$ ist der von allen Kommutatoren erzeugte Normalteiler. Die Gruppe G heißt *perfekt*, wenn sie gleich ihrer derivierten Gruppe $D(G)$ ist. Die *Abelianisierung* von G ist die abelsche Gruppe $G^{ab} := G/D(G)$.

In diesem Sinne sind perfekte Gruppen komplementär zu abelschen Gruppen.

Das folgende Kommutator-Lemma wird in diesem Kapitel und in Abschnitt 4.3 nützlich sein.

Lemma 2.16. Sei G eine beliebige Gruppe mit $x, y, z \in G$. Dann gilt für den Kommutator $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ in G

$$[xy, z] = x[y, z]x^{-1}[x, z], \quad [x, yz] = [x, y]y[x, z]y^{-1}.$$

Wenn $D(G)$ im Zentrum von G liegt, so ist bereits

$$[xy, z] = [x, z][y, z], \quad [x, yz] = [x, y][x, z].$$

Beweis. Es ist in G

$$[xy, z] = xyz(xy)^{-1}z^{-1} = xyz y^{-1}x^{-1}z^{-1} = xyz y^{-1}z^{-1}x^{-1}zx x^{-1}z^{-1} = x[y, z]x^{-1}[x, z],$$

$$[x, yz] = xyzx^{-1}(yz)^{-1} = xyzx^{-1}z^{-1}y^{-1} = xyx^{-1}y^{-1}yxzx^{-1}z^{-1}y^{-1} = [x, y]y[x, z]y^{-1}.$$

Die andere Aussage folgt durch Vertauschen von $[y, z]$ mit x^{-1} bzw. von y mit $[x, z]$. $\square$

Definition 2.17. Eine zentrale Erweiterung $A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$ heißt *universelle perfekte zentrale Erweiterung*, wenn es zu jeder anderen zentralen Erweiterung $B \hookrightarrow E' \twoheadrightarrow G$ einen eindeutigen Morphismus $E \rightarrow E'$ gibt, dessen Restriktion auf A nach B abbildet und der mit der Identität auf G verträglich ist.

Gibt es eine universelle perfekte zentrale Erweiterung, so ist diese eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Man lässt das Adjektiv “perfekt” oft weg, da jede universellen zentrale Erweiterung perfekt ist.

Bemerkung 2.18. Für G -Moduln A lässt sich der Funktor der G -Koinvarianten $A \mapsto A_G$ als kovarianter, rechtsexakter Funktor $\otimes$ der Kategorie $\mathbb{Z}[G]$ -Mod auffassen:

$$A_G = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A.$$

Den n -ten Linksderivierten $L^n(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \cdot)$ bezeichnet man als $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}; \cdot)$ oder auch als $H_n(G; \cdot)$, die n -te *Gruppenhomologie*. Der Funktor $\mathrm{Ab} \rightarrow G\text{-Mod}$, der eine abelsche Gruppe mit einer trivialen G -Operation ausstattet, ist rechtsadjungiert zum Funktor der G -Koinvarianten.

Wir können $H_1(G; \mathbb{Z})$ für $\mathbb{Z}$ mit der trivialen G -Modul-Struktur explizit berechnen:

Lemma 2.19. Sei G eine Gruppe. Dann ist

$$H_1(G; \mathbb{Z}) \simeq G^{ab} = G/D(G).$$

2. K-Theorie und Gruppenkohomologie

Eine Gruppe G ist also genau dann perfekt, wenn $H_1(G; \mathbb{Z}) = 0$ ist.

Beweis. Sei das *Augmentationsideal* I definiert als Kern der Abbildung $\mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$, welche $\sum_{i \in I} n_i g_i$ auf $\sum_{i \in I} n_i$ abbildet. Dann liefert die kurze exakte Sequenz

$$I \hookrightarrow \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$$

eine lange exakte Homologiesequenz, deren Ausschnitt

$$H_1(G; \mathbb{Z}[G]) \rightarrow H_1(G; \mathbb{Z}) \rightarrow I_G \rightarrow \mathbb{Z}[G]_G \rightarrow \mathbb{Z}_G \rightarrow 0$$

uns den Beweis liefert. Es ist nämlich $H_1(G; \mathbb{Z}[G]) = 0$, da $\mathbb{Z}[G]$ für $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} (-)$ ein azyklisches Objekt ist (denn $\mathbb{Z}[G]$ ist $\mathbb{Z}[G]$ -frei). Weiterhin ist die Abbildung $\mathbb{Z}[G]_G \rightarrow \mathbb{Z}_G$ aus der Sequenz ein Isomorphismus, denn $\mathbb{Z}[G]_G \simeq \mathbb{Z}[G]/I \rightarrow \mathbb{Z}_G = \mathbb{Z}$ ist nichts als die Identität auf $\mathbb{Z}$. Damit ist also auch $H_1(G; \mathbb{Z}) \rightarrow I_G$ ein Isomorphismus. Es ist $I_G = I/\{i^{-1}gi \mid i \in I, g \in G\} = I/I^2$, was via

$$G^{ab} \rightarrow I/I^2, [g] \mapsto [g - 1]$$

zu G^{ab} isomorph ist, wie man leicht nachrechnet. $\square$

Das war der Beweis aus [Wei95, Theorem 6.1.11, S. 164].

Lemma 2.20. *Ist $A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$ eine universelle zentrale Erweiterung, so sind G und E perfekt.*

Beweis. Betrachte die Erweiterung

$$H_1(E; \mathbb{Z}) \hookrightarrow H_1(E; \mathbb{Z}) \times G \xrightarrow{\pi} G,$$

und bezeichne die Projektion $E \twoheadrightarrow E/D(E) = H_1(E; \mathbb{Z})$ mit φ . Dann gibt es zwei Morphismen von Erweiterungen $E \rightarrow H_1(E; \mathbb{Z}) \times G$, nämlich (φ, π) und $(0, \pi)$. Da E universell ist, gibt es nur einen solchen Morphismus, also $\varphi = 0$, damit ist $H_1(E; \mathbb{Z}) = 0$.

Nun folgt bereits, dass G perfekt ist, denn jeder Kommutator in G liftet zu einem verschwindenden Kommutator in E , ist also selbst trivial.

Mit Lemma 2.19 ist nun die Aussage gezeigt. $\square$

Satz 2.21 (Universelle Koeffizienten). *Sei G eine Gruppe und A ein G -Modul. Dann ist für jedes natürliche $n \geq 1$:*

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H_{n-1}(G; \mathbb{Z}), A) \rightarrow H^n(G; A) \rightarrow \text{Hom}(H_n(G; \mathbb{Z}), A) \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz (die unnatürlich spaltet).

Das ist [Wei95, Satz 3.6.5, S.89]. $\diamond$

Korollar 2.22. *Ist G eine perfekte Gruppe und A ein G -Modul, so ist*

$$H^2(G; A) \simeq \text{Hom}(H_2(G; \mathbb{Z}), A).$$

Beweis. Aus Satz 2.21 erhalten wir für $n = 2$ eine kurze exakte Sequenz

$$\mathrm{Ext}^1(H_1(G; \mathbb{Z}), A) \hookrightarrow H^2(G; A) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(H_2(G; \mathbb{Z}), A)$$

deren erster Term verschwindet, da $H_1(G; \mathbb{Z}) = 0$ ist, nach Voraussetzung an die Perfektheit von G . $\square$

Die Gruppe $H_2(G; \mathbb{Z})$ heißt auch *Schur-Multiplikator* von G .

Korollar 2.23. *Eine zentrale Erweiterung $E \twoheadrightarrow G$ mit einer perfekten Gruppe E ist eine universelle zentrale Erweiterung genau dann, wenn*

$$H_2(E; \mathbb{Z}) = 0.$$

Beweis. Mit Korollar 2.22 ist dann $H^2(E; A) \simeq \mathrm{Hom}(H_2(E; \mathbb{Z}), A)$ für alle abelschen Gruppen A . Die Erweiterung $E \twoheadrightarrow G$ ist universell genau dann, wenn es keine nichttrivialen Erweiterungen von E gibt, also wenn für alle A stets $H^2(E; A)$ trivial ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $H^2(E; \mathbb{Z}) = 0$. $\square$

Satz 2.24 (Hopf). *Ist eine perfekte Gruppe durch Erzeuger und Relationen präsentiert als $G = F/R$ mit $R \rightarrow F$ Homomorphismus von freien Gruppen, so ist der Schur-Multiplikator von G gegeben als*

$$H_2(G; \mathbb{Z}) = \frac{R \cap [F, F]}{[R, F]}$$

und $H_2(G; \mathbb{Z})$ ist der Kern der universellen zentralen Erweiterung von G :

$$H_2(G; \mathbb{Z}) = \frac{R \cap [F, F]}{[R, F]} \hookrightarrow \frac{[F, F]}{[R, F]} \twoheadrightarrow [G, G] = G.$$

Hopf hat in [Hop42] einen elementaren Beweis gefunden. Ein anderer Beweis findet sich bei [Wei95, Satz 6.8.7], als Anwendung der Serre-Hochschild-Spektralsequenz.

Satz 2.25. *Eine universelle zentrale Erweiterung von G existiert genau dann, wenn $H_1(G; \mathbb{Z}) = 0$ ist und die universelle Erweiterung $E \twoheadrightarrow G$ ist genau die, für die $H_1(E; \mathbb{Z}) = 0$ und $H_2(E; \mathbb{Z}) = 0$ gilt.*

Beweis. Die erste Aussage ist Lemma 2.20 und Satz 2.24, die zweite ist Lemma 2.20 und Korollar 2.23. $\square$

Bemerkung 2.26. Die Situation, die wir studiert haben, ist ähnlich der Überlagerungstheorie in der Topologie.

Sei $\mathcal{C}$ eine konkrete Kategorie (d.h. eine Unterkategorie von Set) und $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt. Dann ist die *Pfeilkategorie* $\mathcal{C} \downarrow X$ die Kategorie mit Morphismen $\pi : Y \rightarrow X$ als Objekten (mit $Y \in \mathcal{C}$ beliebig) und Morphismen $Y \rightarrow Y'$, die mit den Abbildungen nach X kommutieren, als Morphismen. Für jeden Punkt $x \in X$ und jedes Objekt $\pi : Y \rightarrow X$ können wir von der Faser $\pi^{-1}(x)$ sprechen. Wenn die Objekte von $\mathcal{C}$ ausgezeichnete Punkte haben, können wir von der Faser über dem ausgezeichneten Punkt reden.

2. K-Theorie und Gruppenkohomologie

Betrachtet man für $\mathcal{C} = \text{CW}_*$, die Kategorie der CW-Komplexe mit Basispunkt, so bilden die Überlagerungen eines Raums X eine Unterkategorie von $\mathcal{C} \downarrow X$. Die Faser einer Überlagerung ist isomorph zu einem Quotienten der Fundamentalgruppe von X . Jeder zusammenhängende Raum $X \in \text{CW}_*$, also mit $\pi_0(X) = 0$, hat eine universelle Überlagerung $\tilde{X} \rightarrow X$, die auf jede andere Überlagerung Y eindeutig mit einem Morphismus von Überlagerungen $\tilde{X} \rightarrow Y$ surjektiv abbildet. Es ist $\pi_0(\tilde{X}) = 0$ und $\pi_1(\tilde{X}) = 0$.

Ist $\mathcal{C}$ die Kategorie der Gruppen mit dem neutralen Element als ausgezeichnetem Punkt jeder Gruppe, so sind zentrale Erweiterungen einer Gruppe G eine Unterkategorie von $\mathcal{C} \downarrow G$. Die Faser einer zentralen Erweiterung ist ihr Kern. Jede perfekte Gruppe G hat eine universelle zentrale Erweiterung $\tilde{G}$, die auf jede andere zentrale Erweiterung E eindeutig mit einem Morphismus von Erweiterungen $\tilde{G} \rightarrow E$ surjektiv abbildet. Es ist $H_1(\tilde{G}; \mathbb{Z}) = 0$ und $H_2(\tilde{G}; \mathbb{Z}) = 0$.

Bemerkung 2.27. Für perfekte zusammenhängende topologische Gruppen lässt sich die topologische Fundamentalgruppe und der Kern der universellen zentralen Erweiterung betrachten. Diese stimmen i.A. nicht überein, z.B. ist $\pi_1^{\text{top}}(\text{SL}_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}$, jedoch $H_2(\text{SL}_2(\mathbb{R}), \mathbb{Z})$ größer als $\mathbb{Z}$, sodass die universelle Überlagerung von $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ keine nicht-trivialen Überlagerungen hat, hingegen zahlreiche nicht-triviale zentrale Erweiterungen. Diese Frage wurde in [HK11] gestellt und beantwortet.

2.3. K-Theorie

Wir betrachten zur Einführung kurz die klassische “Quillen”-K-Theorie eines Rings R .

Definition 2.28. $K_0(R)$ ist die Grothendieckgruppe der endlich erzeugten projektiven Moduln mit der direkten Summe von R -Moduln als Monoidoperation.

Bass definierte $K_1(R)$ als Abelianisierung der unendlichen allgemeinen linearen Gruppe $\text{GL}(R)$. Nach Whitehead’s Lemma ist $[\text{GL}(R), \text{GL}(R)] = E(R)$, dabei bezeichnet $E(R) \subseteq \text{SL}(R) \subset \text{GL}(R)$ die elementare Untergruppe, also die von den Elementarmatrizen erzeugte Untergruppe in $\text{SL}(R)$. Damit ist $K_1(R) = \text{GL}(R)/E(R)$, die sogenannte Whiteheadgruppe von R .

Milnor definierte $K_2(R)$ als Zentrum der Steinberggruppe $\text{St}(R)$, die definiert ist als universelle zentrale Erweiterung der perfekten Gruppe $E(R)$. Das Zentrum von $\text{St}(R)$ ist der Kern der Projektion $\text{St}(R) \rightarrow E(R)$. Damit ist also $K_2(R) = H_2(E(R); \mathbb{Z})$, denn nach Satz 2.24 ist auch $H_2(E(R); \mathbb{Z})$ der Kern der universellen zentralen Erweiterung von $E(R)$.

Der Zusammenhang zwischen K_1 , K_2 und $\text{St}(R)$ lässt sich in zwei Erweiterungen zusammenfassen:

$$K_2(R) \hookrightarrow \text{St}(R) \twoheadrightarrow \text{SL}(R), \quad E(R) \hookrightarrow \text{GL}(R) \twoheadrightarrow K_1(R),$$

Für einen Körper k lässt sich die klassische K-Theorie berechnen als $K_0(k) = \mathbb{Z}$ und es gibt einen offensichtlichen Isomorphismus $\det : K_1(k) \xrightarrow{\sim} k^\times$.

Steinberg [Ste62] konnte für einen Körper k nun $E(k)$ durch Erzeuger und Relationen darstellen, sodass sich die Erzeuger direkt auf $\text{St}(k)$ liften lassen. Wir werden das in Abschnitt 3.4 genauer untersuchen.

Satz 2.29 (Quillen). *Für einen endlichen Körper k ist $K_2(k) = 0$.*

Das ist ein Spezialfall von [Qui72, §12, Theorem 8]. $\diamond$

Bemerkung 2.30. Für einen unendlichen Körper k ist $K_2(k)$ nach dem Satz von Matsumoto (siehe Kapitel 4) isomorph zu $k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} k^\times / (a \otimes (1 - a))$. Das gab Milnor den Anlass, höhere K-Gruppen für Körper zu definieren. Diese stimmen nicht mit Quillens höherer K-Theorie aus [Qui72] überein, sind aber in einem gewissen Sinne der einfachste Teil davon, siehe dazu [Tot92].

Definition 2.31. Sei k ein Körper und $T(k^\times) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_{i=1}^n k^\times$ die Tensoralgebra über den Einheiten, die wir additiv notieren. Dann ist *Milnor-K-Theorie* definiert als

$$K_{\bullet}^M(k) := T(k^\times) / \langle a \otimes (1 - a) \rangle,$$

wobei wir mit $\langle a \otimes (1 - a) \rangle$ das von $\{a \otimes (1 - a) \mid a \in k^\times\}$ in $T(k^\times)$ erzeugte beidseitige Ideal bezeichnen. Die Relation $a \otimes (1 - a) = 0$ heißt *Steinberg-Relation*.

Insbesondere ist

$$K_2^M(k) = (k^\times \otimes k^\times) / \langle a \otimes (1 - a) \rangle.$$

Für die Restklasse von $a \otimes b$ in $K_2^M(k)$ schreiben wir $\{a, b\}$ (diese Erzeuger von $K_2^M(k)$ werden auch *Steinberg-Symbole* genannt).

Diese Definition ist angelehnt an [Mil70, §1, S. 1].

Wir rechnen kurz einige Relationen nach, die aus der Bilinearität und der Steinberg-Relation für die Erzeuger $\{a, b\} \in K_2^M(k)$ folgen.

Lemma 2.32. *In $K_2^M(k)$ gelten für alle $a, b \in k^\times$:*

- (a). $\{a, b\} = \{a, (1 - a)b\}$ (*verallgemeinerte Steinberg-Relation*),
- (b). $\{a, b\} = -\{a, b^{-1}\}$,
- (c). $\{a, b\} = -\{a^{-1}, b\}$,
- (d). $\{a, b\} = \{a^{-1}, b^{-1}\}$.

Beweis.

- (a). Wegen Bilinearität ist $\{a, (1 - a)b\} = \{a, (1 - a)\} + \{a, b\}$, mit der Steinberg-Relation ist $\{a, (1 - a)\} + \{a, b\} = 0 + \{a, b\}$, also $\{a, b\} = \{a, (1 - a)b\}$.
- (b). Wegen Bilinearität ist $\{a, b\} + \{a, b^{-1}\} = \{a, bb^{-1}\} = \{a, 1\} = 0$, also ist $\{a, b\} = -\{a, b^{-1}\}$.
- (c). Analog zu (b) ist $\{a, b\} + \{a^{-1}, b\} = 0$, also $\{a, b\} = -\{a^{-1}, b\}$.
- (d). Nach (b) und (c) ist $\{a, b\} = -\{a, b^{-1}\} = \{a^{-1}, b^{-1}\}$. $\square$

2.4. Symplektische K-Theorie

Milnor [Mil71, §12] gibt einen elementaren Beweis, dass $K_2(k) \simeq K_2^M(k)$ ist. Der volle Satz von Matsumoto gibt hingegen noch mehr Informationen über den Körper: Für nicht-symplektische einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppen über k ist der Kern der universellen zentralen Erweiterung genau $K_2^M(k)$ und für eine symplektische einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe über k (siehe Abschnitt 3.4) ist der Kern der universellen zentralen Erweiterung nicht $K_2^M(k)$, sondern eine andere Gruppe, die mit $K_2^M(k)$ stark zusammenhängt:

Definition 2.33. Sei k ein Körper. Dann sei $K_2^{Sp}(k)$ die abelsche Gruppe, die von den Elementen $\llbracket a, b \rrbracket$ für $a, b \in k^\times$ erzeugt wird, unter den Relationen

- (1) $\llbracket a, bc \rrbracket + \llbracket b, c \rrbracket = \llbracket ab, c \rrbracket + \llbracket a, b \rrbracket$, (schwache Bilinearität)
- (2) $\llbracket 1, 1 \rrbracket = 0$, $\llbracket a, b \rrbracket = \llbracket a^{-1}, b^{-1} \rrbracket$ (schwache Normiertheit)
- (3) $\llbracket a, b \rrbracket = \llbracket a, (1 - a)b \rrbracket$ für $a \neq 1$ (verallgemeinerte Steinberg-Relation)

für alle $a, b, c \in k^\times$. Wir nennen $K_2^{Sp}(k)$ *zweite symplektische K-Theorie von k* .

Die Notation K_2^{Sp} haben wir aus [Sus87] übernommen, wo eine ähnliche Präsentation für $H_2(\mathrm{Sp}_\infty, \mathbb{Z})$ studiert wird.

Ähnlich wie in Lemma 2.32 folgen weitere Relationen in $K_2^{Sp}(k)$.

Lemma 2.34. Für alle $a, b \in k^\times$ gilt

- (a). $\llbracket a, 1 \rrbracket = 0 = \llbracket 1, b \rrbracket$ (Normiertheit),
- (b). $\llbracket a, b \rrbracket = \llbracket a, -ab \rrbracket = \llbracket a, -a^{-1}b \rrbracket$,
- (c). $\llbracket a, -a^{-1} \rrbracket = 0$,
- (d). $\llbracket b, b \rrbracket = \llbracket b, -1 \rrbracket$,
- (e). $\llbracket a, b^2 \rrbracket = \llbracket a, b \rrbracket - \llbracket b, a \rrbracket$.

Beweis.

- (a). Schwache Bilinearität liefert für $a \in k^\times$ und $b = c = 1$ die Gleichung $\llbracket a, 1 \rrbracket + \llbracket 1, 1 \rrbracket = \llbracket a, 1 \rrbracket + \llbracket a, 1 \rrbracket$, also $\llbracket a, 1 \rrbracket = \llbracket 1, 1 \rrbracket = 0$. Symmetrisch sehen wir für $a = b = 1$ und $c \in k^\times$ mit schwacher Bilinearität die Gleichung $\llbracket 1, c \rrbracket + \llbracket 1, c \rrbracket = \llbracket 1, c \rrbracket + \llbracket 1, 1 \rrbracket$, also $\llbracket 1, c \rrbracket = \llbracket 1, 1 \rrbracket = 0$.
- (b). Für $x \in k^\times$, $x \neq 1$, gilt $(1 - x^{-1})^{-1} = (x - 1)^{-1}x = -(1 - x)^{-1}x$ und damit berechnen wir für $a \neq 1$:

$$\begin{aligned}
 & \text{(schwache Normiertheit)} & \llbracket a, b \rrbracket &= \llbracket a^{-1}, b^{-1} \rrbracket \\
 & \text{(verallg. Steinberg-Relation)} & &= \llbracket a^{-1}, (1 - a^{-1})b^{-1} \rrbracket \\
 & \text{(schwache Normiertheit)} & &= \llbracket a, (1 - a^{-1})^{-1}b \rrbracket \\
 & \text{(Rechnung in } k^\times) & &= \llbracket a, -(1 - a)^{-1}ab \rrbracket \\
 & \text{(verallg. Steinberg-Relation)} & &= \llbracket a, -(1 - a)(1 - a)^{-1}ab \rrbracket \\
 & & &= \llbracket a, -ab \rrbracket.
 \end{aligned}$$

Damit ist auch direkt $\llbracket a, b \rrbracket = \llbracket a, -a(-a^{-1}b) \rrbracket = \llbracket a, -a^{-1}b \rrbracket$.

- (c). Nach (b) ist $\llbracket a, -a^{-1} \rrbracket = \llbracket a, -a^{-1}1 \rrbracket = \llbracket a, 1 \rrbracket$, nach (a) ist dies bereits 0.
- (d). Da $b = -b(-1)$ für alle $b \in k^\times$, folgt mit (b) $\llbracket b, -1 \rrbracket = \llbracket b, -b(-1) \rrbracket = \llbracket b, b \rrbracket$.
- (e). Aus (b) folgt $\llbracket ab, b \rrbracket = \llbracket ab, -(ab)^{-1}b \rrbracket = \llbracket ab, -a^{-1} \rrbracket$. Damit können wir nun rechnen:

$$\begin{aligned}
 (\text{schwache Bilinearität}) \quad \llbracket a, b^2 \rrbracket &= \llbracket a, b \rrbracket + \llbracket ab, b \rrbracket - \llbracket b, b \rrbracket \\
 (d) \quad &= \llbracket a, b \rrbracket + \llbracket ab, b \rrbracket - \llbracket b, -1 \rrbracket \\
 (\text{Rechnung in } k^\times) \quad &= \llbracket a, b \rrbracket + \llbracket ab, b \rrbracket - \llbracket b, -a^{-1}a \rrbracket \\
 (\text{vorige Rechnung}) \quad &= \llbracket a, b \rrbracket + \llbracket ab, -a^{-1} \rrbracket - \llbracket b, -a^{-1}a \rrbracket \\
 (c) \quad &= \llbracket a, b \rrbracket + \llbracket ab, -a^{-1} \rrbracket - \llbracket b, -a^{-1}a \rrbracket - \llbracket a, -a^{-1} \rrbracket \\
 (\text{schwache Bilinearität}) \quad &= \llbracket a, b \rrbracket - \llbracket b, a \rrbracket
 \end{aligned}$$

Womit die Aussage gezeigt ist. $\square$

Lemma 2.35. Die Abbildung $c_u : k^\times \times k^\times \rightarrow K_2^{Sp}(k)$, $(a, b) \mapsto \llbracket a, b \rrbracket$, der universelle Kozykel ist ein normalisierter 2-Kozykel im Sinne der Gruppenkohomologie, wie in Definition 2.8. Damit definiert c_u eine zentrale Erweiterung $K_2^{Sp}(k) \hookrightarrow \varepsilon \twoheadrightarrow k^\times$, wobei $k^\times$ auf $K_2^{Sp}(k)$ trivial operiert.

Beweis. Schwache Bilinearität in $K_2^{Sp}(k)$ liefert genau die Bedingung “verschwindendes Differential” für 2-Kozykel. Normiertheit in $K_2^{Sp}(k)$ liefert genau Normiertheit von c_u als 2-Kozykel. Die Erweiterung ist $\varepsilon = K_2^{Sp}(k) \rtimes^{c_u} k^\times$. $\square$

Die beiden (zweiten) K-Theorien $K_2^M(k)$ und $K_2^{Sp}(k)$ hängen eng miteinander zusammen.

Lemma 2.36. Die Quotientenabbildung $k^\times \times k^\times \twoheadrightarrow K_2^M(k)$ faktorisiert über einen Homomorphismus

$$\varphi : K_2^{Sp}(k) \rightarrow K_2^M(k), \quad \llbracket a, b \rrbracket \mapsto \{a, b\}.$$

Dieses φ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, dessen Kern von den Elementen der Form $\llbracket a, b \rrbracket + \llbracket a, c \rrbracket - \llbracket a, bc \rrbracket$ für $a, b, c \in k^\times$ erzeugt wird.

Beweis. Zur Wohldefiniertheit sind für $k^\times \times k^\times \rightarrow K_2^M(k)$, $(a, b) \mapsto \{a, b\}$ die Relationen für $K_2^{Sp}(k)$ nachzurechnen. Dabei sind die Relationen (1) und (2) nach universeller Eigenschaft des Tensorproduktes erfüllt. Die anderen Relationen folgen aus der Steinberg-Relation für $K_2^M(k)$, wir haben sie bereits in Lemma 2.32 gezeigt. Die Abbildung φ ist offensichtlich surjektiv, da alle Erzeuger $\{a, b\}$ von $K_2^M(k)$ im Bild liegen. Sie ist ein Gruppenhomomorphismus, da beide Gruppen als Quotienten der freien abelschen Gruppe über $k^\times \times k^\times$ präsentierbar sind und φ über die Identität auf $k^\times \times k^\times$ definiert wurde. Die einzige Relation, die in $K_2^M(k)$ gilt, und in $K_2^{Sp}(k)$ a priori nicht erfüllt ist, ist Bilinearität, daher ist klar, dass der Kern erzeugt wird von allen Elementen der Form $\llbracket a, b \rrbracket + \llbracket a, c \rrbracket - \llbracket a, bc \rrbracket$ für $a, b, c \in k^\times$. $\square$

2. K-Theorie und Gruppenkohomologie

Lemma 2.37. *Der Gruppenhomomorphismus $\natural : K_2^{Sp}(k) \rightarrow K_2^{Sp}(k)$, $\llbracket a, b \rrbracket \mapsto \llbracket a, b^2 \rrbracket$ faktorisiert über $K_2^M(k)$, d.h. über einen Homomorphismus*

$$\natural : K_2^M(k) \rightarrow K_2^{Sp}(k), \{a, b\} \mapsto \llbracket a, b^2 \rrbracket.$$

Definieren wir die Zuordnung $\vee : k^\times \times k^\times \rightarrow K_2^{Sp}(k)$ durch $(a, b) \mapsto -\llbracket b, a \rrbracket$, so gilt für $a, b \in k^\times$ die Identität $\llbracket a, b \rrbracket + \vee(a, b) = \natural(\llbracket a, b \rrbracket)$. Damit ist $\vee(a, b) = \natural(\llbracket a, b \rrbracket) - \llbracket a, b \rrbracket$ und $\vee$ faktorisiert über einen involutiven Homomorphismus

$$\vee : K_2^{Sp}(k) \rightarrow K_2^{Sp}(k), \llbracket a, b \rrbracket \mapsto -\llbracket b, a \rrbracket.$$

Beweis. Die Abbildung $\natural$ erfüllt die verallgemeinerte Steinberg-Relation

$$\llbracket a, b^2 \rrbracket = \llbracket (a, (1-a)b^2) \rrbracket = \llbracket a, (1-a)^2 b^2 \rrbracket = \llbracket a, ((1-a)b)^2 \rrbracket$$

und schwache Normiertheit

$$\llbracket 1, 1^2 \rrbracket = 0, \quad \llbracket a, b^2 \rrbracket = \llbracket a^{-1}, b^{-2} \rrbracket.$$

Wenn $\natural$ auch Bilinearität erfüllt, so insbesondere schwache Bilinearität, damit ist $\natural$ ein Gruppenhomomorphismus und nach Lemma 2.36 faktorisiert dieser über $K_2^M(k)$. Wir betrachten die Erweiterung $\varepsilon = K_2^{Sp}(k) \rtimes^{c_u} k^\times$ aus Lemma 2.35. Nach Definition ist die Multiplikation von zwei Elementen $(A, x), (B, y) \in \varepsilon$ gegeben durch

$$(A, x) \cdot (B, y) = (AB \ c(x, y), xy), \text{ und } (B, y) \cdot (A, x) = (AB \ c(y, x), xy).$$

Damit rechnen wir den Kommutator $[(A, x), (B, y)] \in \varepsilon$ aus als

$$[(A, x), (B, y)] = (AB \ c(x, y) \ c(y, x)^{-1} \ (AB)^{-1}, xy(xy)^{-1}) = (c(x, y)c(y, x)^{-1}, 1).$$

Mit Lemma 2.34 (e) rechnen wir für $a, b \in k^\times$

$$\natural(\llbracket a, b \rrbracket) = \llbracket a, b^2 \rrbracket = \llbracket a, b \rrbracket - \llbracket b, a \rrbracket.$$

Nach Definition ist $c(a, b) = \llbracket a, b \rrbracket$, allerdings haben wir Kozykel multiplikativ notiert, also ist $\llbracket a, b \rrbracket - \llbracket b, a \rrbracket$ genau der Ausdruck $c(a, b)c(b, a)^{-1} = \text{proj}_1([(A, x), (B, y)])$. Somit können wir $\natural(\llbracket a, b \rrbracket)$ als Kommutator in ε schreiben und sehen daran (siehe auch Lemma 2.16), dass $\natural$ bilinear ist.

Die Aussage $\llbracket a, b \rrbracket + \vee(a, b) = \natural(\{a, b\})$ ist nichts als $\llbracket a, b \rrbracket - \llbracket b, a \rrbracket = \llbracket a, b^2 \rrbracket$, was wir bereits in Lemma 2.34 (e) gezeigt haben. Da sich $\vee$ also als Differenz von Abbildungen $k^\times \times k^\times \rightarrow K_2^{Sp}(k)$ schreiben lässt, die beide über $K_2^{Sp}(k)$ faktorisieren, faktorisiert auch $\vee$ über $K_2^{Sp}(k)$. $\square$

Die Abbildung $\natural : K_2^M(k) \rightarrow K_2^{Sp}(k)$ wurde von Suslin in [Sus87, Corollary 6.2, S. 27] in Zusammenhang mit quadratischen Formen untersucht (Suslin notiert λ anstelle von $\natural$).

Korollar 2.38. Für $a, b \in k^\times$ gilt

$$[[a, b]] = [[a, -ab]] = [[-ab, b]] = [[b^{-1}, a]] \quad \text{und} \quad [[a^2, b]] = [[a, b^2]].$$

Beweis. Wir wissen aus Lemma 2.34 (b) bereits $[[a, b]] = [[a, -ab]]$. Da $\vee : [[a, b]] \mapsto -[[b, a]]$ ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt auch $\vee([a, b]) = \vee([a, -ab])$, d.h. $-[[b, a]] = -[[ab, a]]$, mithin (durch Umbenennung $a \leftrightarrow b$) $[[a, b]] = [[-ab, b]]$. Damit rechnen wir nun:

$$\begin{aligned} [[a, b]] &= [[-ab^{-1}(-b), b]] \\ &= [[-ab^{-1}, b]] \\ &= [[-ab^{-1}, -(-ab^{-1})b]] \\ &= [[-ab^{-1}, a]] \\ &= [[b^{-1}, a]]. \end{aligned}$$

Damit rechnen wir weiter:

$$\begin{aligned} (\text{vorige Rechnung}) \quad [[a^2, b]] &= [[b^{-1}, a^2]] \\ (\text{Lemma 2.34 (e)}) \quad &= [[b^{-1}, a]] - [[a, b^{-1}]] \\ &= [[a, b]] - [[b, a]] \\ (\text{Lemma 2.34 (e)}) \quad &= [[a, b^2]] \end{aligned}$$

Womit dann alles gezeigt ist. $\square$

Korollar 2.39. Die Relationen aus Lemma 2.34 und aus Korollar 2.38 gelten auch für $\{a, b\} \in K_2^M(k)$ und die Abbildung $c_u : k^\times \times k^\times \rightarrow K_2^M(k)$, $(a, b) \mapsto \{a, b\}$ ist auch ein normierter 2-Kozykel. Außerdem gilt in $K_2^M(k)$ noch die Relation

$$(\text{Schiefsymmetrie}) \quad \{a, b\} = -\{b, a\}.$$

Die Homomorphismen $\vee$ und $\natural$ faktorisieren, wenn man sie mit der Quotientenabbildung $\varphi : K_2^{Sp}(k) \rightarrow K_2^M(k)$ aus Lemma 2.36 verknüpft, über $K_2^M(k)$ und es gilt $\text{id} = \vee : K_2^M(k) \rightarrow K_2^M(k)$ sowie $\cdot 2 = \natural : K_2^M(k) \rightarrow K_2^M(k)$.

Beweis. Mit Bilinearität ist $-\{b, a\} = \{b^{-1}, a\} = \{a, b\}$, wie in Korollar 2.38. Dass $\varphi \circ \vee, \varphi \circ \natural : K_2^{Sp}(k) \rightarrow K_2^M(k)$ Bilinearität erfüllen, ist nach Definition von $\vee$ und $\natural$ klar. Somit ist $\vee(\{a, b\}) = -\{b, a\} = \{a, b\}$ und $\natural(\{a, b\}) = \{a, b\} - \{b, a\} = 2\{a, b\}$. $\square$

Im Beweis von Matsumotos Satz benötigen wir ein technisches Hilfsmittel.

Lemma 2.40. Für $a \in k^\times$ und $i, j \in \mathbb{Z}$ ist $2\{a, a\} = 0$ und damit auch $\{a^{2i}, a^j\} = 0$ in $K_2^M(k)$. Es ist auch $[[\pm a^{2i}, a^{2j}]] = 0$ in $K_2^{Sp}(k)$.

Beweis. Mit Schiefsymmetrie ist $2\{a, a\} = \{a, a\} + \{a, a\} = \{a, a\} - \{a, a\} = 0$. Es ist $\{a^{2i}, a^j\} = 2ij\{a, a\}$ wegen Bilinearität, also $\{a^{2i}, a^j\} = 0$. Nach Lemma 2.37 ist $[[a^{2i}, a^{2j}]]$ das Bild von $\{a^{2i}, a^j\}$ unter einem Homomorphismus $K_2^M(k) \rightarrow K_2^{Sp}(k)$, also selbst 0. Mit $[[\pm a^{2i}, a^{2j}]] = [[a^{2(i+j)}, a^{2j}]]$ folgt die letzte Behauptung. $\square$

2. K-Theorie und Gruppenkohomologie

Mit Korollar 2.39 können wir jetzt noch einen Satz beweisen.

Satz 2.41 (Steinberg). *Für einen endlichen Körper k ist $K_2^M(k) = 0$.*

Beweis. Dies ist [Mil70, Example 1.5, S. 321] bzw. [Wei, Corollary 6.1.1., III.§6].

Die multiplikative Gruppe $k^\times$ eines endlichen Körpers ist zyklisch. Ist $\zeta \in k^\times$ ein Erzeuger, so ist $2\{\zeta, \zeta\} = \{\zeta, \zeta\} + \{\zeta, \zeta\} = 0$, denn in $K_2^M(k)$ ist wegen Schiefsymmetrie $\{a, a\} = -\{a, a\}$. Jedenfalls ist auch $\{\zeta, \zeta\}$ ein Erzeuger von $K_2^M(k)$.

In Charakteristik 2 ist $\zeta = -\zeta$ und $\{\zeta, \zeta\} = \{\zeta, -\zeta\} = \{\zeta, 1\} = 0$.

Ansonsten betrachten wir die Involution $u \mapsto 1 - u$ auf $k^\times \setminus \{1\}$. Es gibt in $k^\times$ genau $(|k| - 1)/2$ Quadrate sowie ebenso viele Nichtquadrate, in $k^\times \setminus \{1\}$ gibt es aber ein Quadrat weniger als Nichtquadrate (nämlich 1). Damit muss die Involution ein Nichtquadrat auf ein Nichtquadrat abbilden, d.h. es gibt ζ^{2i+1} mit $1 - \zeta^{2i+1} = \zeta^{2j+1}$ für $i, j \in \mathbb{Z}$. Das aber bedeutet aufgrund der Steinberg-Relation $\{\zeta^{2i+1}, \zeta^{2j+1}\} = 0$. Damit ist $(2i + 1)(2j + 1)\{\zeta, \zeta\} = 0$, also wegen $2\{\zeta, \zeta\} = 0$ bereits $\{\zeta, \zeta\} = 0$, mithin $K_2^M(k) = 0$. $\square$

Korollar 2.42. *Für einen endlichen Körper ist $K_2^M(k) = K_2(k)$.*

Beweis. Sowohl $K_2(k)$ als auch $K_2^M(k)$ verschwinden für endliche Körper, nach Satz 2.29 und Satz 2.41. $\square$

3. Chevalley-Gruppen

Eine kurze Warnung an den Leser: Eigentlich soll es in dieser Arbeit ohnehin nur um einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppen gehen, und in der Notation geht in diesem Kapitel einiges durcheinander.

Wir wollen in dieser Arbeit unter einem *Schema* stets ein separiertes Schema im Sinne von [Har77, Kapitel II, S. 74] verstehen. Alle betrachteten Ringe sollen stets kommutativ und mit Eins sein. Wir werden nur perfekte Körper k betrachten. Weiterhin nennen wir für einen Körper k ein Schema von endlichem Typ über k , welches über $\bar{k}$ reduziert ist, eine k -Varietät.

3.1. Reduktive lineare algebraische Gruppen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen über Varietäten, algebraische Gruppen, ihre Lie-Algebren und Wurzelsysteme vorausgesetzt, wie in [Spr09] (oder [Bou68]) ausgeführt. Wir werden vor allem die Notation fixieren, dann noch etwas zur Automorphismengruppe (Weylgruppe und sogenannten Diagramm-Automorphismen) feststellen, was im weiteren Verlauf benötigt wird. Wesentlich für die restliche Arbeit ist vor allem Abschnitt 3.4.

Definition 3.1. Sei k ein Körper. Eine *algebraische Gruppe* $\mathbb{G}$ über k ist eine k -Varietät $\mathbb{G}$, die ein Gruppenobjekt in der Kategorie der k -Varietäten ist. Das impliziert für die Punkte über einem Ring R , dass $\mathbb{G}(R)$ eine Gruppe ist und die Multiplikation $\mu : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ sowie Inversion $i : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ Morphismen von k -Varietäten sind. Schließlich nennen wir eine algebraische Gruppe $\mathbb{G}$ über k *lineare algebraische Gruppe*, wenn sie als k -Varietät affin ist.

Das ist [Spr09, Definition 2.1.1, S. 21].

Wir erinnern an die Diskussion zentraler Erweiterungen in Bemerkung 2.26.

Beispiel 3.2. Ist $\mathbb{G}$ eine lineare algebraische Gruppe über $\mathbb{Q}$, so lassen sich die reellen Punkte $\mathbb{G}(\mathbb{R})$ sowie die komplexen Punkte $\mathbb{G}(\mathbb{C})$ mit der Struktur einer reellen Liegruppe ausstatten. Diese beiden verschiedenen topologischen Gruppen haben ihrerseits i.A. verschiedene topologische Fundamentalgruppen und universelle zentrale Erweiterungen (sofern sie überhaupt perfekt sind).

Für $\mathbb{G} = \mathrm{SL}_2$ ist $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ als Liegruppe einfach zusammenhängend in dem Sinne, dass $\pi_1(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \mathrm{Id})$ die triviale Gruppe ist. Hingegen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist nicht einfach zusammenhängend, da $\pi_1(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{Id}) = \mathbb{Z}$ ist. Die universelle Überlagerung der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist daher eine Erweiterung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{Z}$ (man kann sich das bis auf Homöomorphismus als die Überlagerung eines ausgefüllten Torus durch einen ausgefüllten Zylinder vorstellen; mit der Iwasawa-Zerlegung lässt sich diese Anschauung präzisieren). Diese ist eine zentrale Erweiterung, da $\mathbb{Z}$ abelsch ist.

Wir werden in dieser Arbeit mit $\mathbb{G}$ stets eine lineare algebraische Gruppe bezeichnen. Die auftretenden algebraischen Gruppen sollen stets *zusammenhängend* sein.

Wir bezeichnen mit $\mathbb{G}_a$ die *additive* algebraische Gruppe (mit $\mathbb{G}_a(R) = (R, +)$ für jeden Ring R) und mit $\mathbb{G}_m$ die *multiplikative* algebraische Gruppe (mit $\mathbb{G}_m(R) = (R^\times, \cdot)$ für jeden Ring R).

3. Chevalley-Gruppen

Definition 3.3. Eine abgeschlossene Untergruppe $H \leq \mathbb{G}$ heißt *k-split Torus*, wenn H über k isomorph ist zu einem Produkt $(\mathbb{G}_m)^n$. Dabei heißt n der *Rang* von H . Eine Untergruppe $H \leq \mathbb{G}$ heißt *Torus*, wenn H über $\bar{k}$ ein $\bar{k}$ -split Torus ist. Ein Torus H heißt *maximal*, wenn er nicht echt in einem anderen Torus enthalten ist. Wenn ein maximaler zusammenhängender abgeschlossener Torus H von $\mathbb{G}$ ein k -split Torus ist, so heißt $\mathbb{G}$ auch *split*. Der *Rang* von $\mathbb{G}$ ist der Rang eines maximalen zusammenhängenden abgeschlossenen Torus.

Dass der Rang damit wohldefiniert ist, liegt daran, dass alle solchen maximalen Tori zueinander konjugiert sind, siehe etwa [Spr09, Theorem 6.4.1., S. 108].

Lemma 3.4. *Ist ein maximaler Torus $H \leq \mathbb{G}$ ein k -split Torus, so ist H sein eigener Zentralisator $Z_{\mathbb{G}}(H)$.*

Beweis. Jede reduktive lineare algebraische Gruppe $\mathbb{G}$ lässt sich in die GL_n einbetten, für $n \in \mathbb{N}$ groß genug (siehe etwa [Spr09, Theorem 2.3.7. (i), S. 30]). Die Eigenschaft von H , über k split zu sein, entspricht simultaner Diagonalisierbarkeit der Elemente von $H(R)$ in $\mathrm{GL}_n(R)$ für R beliebige k -Algebren. Kommutiert ein Element $g \in \mathrm{GL}_n(R)$ mit allen Diagonalmatrizen, so ist g selbst bereits diagonal. Kommutiert ein Element $g \in \mathbb{G}(R) \subseteq \mathrm{GL}_n(R)$ mit allen Elementen von $H \subseteq \mathbb{G}(R)$, so auch mit allen anderen Diagonalmatrizen, liegt also in H . $\square$

Eigentlich ist dieser Beweis sehr schlampig und man sollte wohl besser auf Humphreys verweisen.

Definition 3.5. Sei $\mathbb{G}$ eine lineare algebraische Gruppe über einem perfekten Körper k . Dann definieren wir das *Radikal* $R(\mathbb{G})$ als den maximalen abgeschlossenen zusammenhängenden auflösbaren Normalteiler in $\mathbb{G}$ und das *unipotente Radikal* $R_u(\mathbb{G})$ als die maximale abgeschlossene zusammenhängende unipotente Untergruppe in $\mathbb{G}$. Die Gruppe $\mathbb{G}$ heißt *reduktiv*, wenn $R_u(\mathbb{G}) = \{Id\}$ ist. Sie heißt *halbeinfach*, wenn $R(\mathbb{G}) = \{Id\}$ ist.

Beispiel 3.6. Für $\mathbb{G} = \mathrm{GL}_n$ ist das Radikal erzeugt von Diagonalmatrizen, die sämtlich den gleichen Eintrag auf der Diagonalen haben. Die reellen Punkte des unipotenten Radikals werden erzeugt von der Diagonalmatrix, die nur die Einträge -1 auf der Diagonalen hat. Für $\mathbb{G} = \mathrm{SL}_n$ sind sowohl unipotentes Radikal als auch Radikal triviale Untergruppen, also ist SL_n halbeinfach.

Bemerkung 3.7. Da nach Definition $R_u(\mathbb{G}) \subseteq R(\mathbb{G})$ ist, sind halbeinfache Gruppen stets reduktiv.

3.2. Weylgruppen

Bemerkung 3.8. Wir werden für eine lineare algebraische Gruppe stets einen maximalen Torus H fest wählen und bezeichnen mit $\Phi(\mathbb{G})$ das zu $(\mathbb{G}, H)$ assoziierte Wurzelsystem, mit Φ^+ eine Wahl positiver Wurzeln und mit $\Delta \subset \Phi^+$ ein System einfacher Wurzeln. Die von uns betrachteten Wurzelsysteme sollen stets *reduziert* sein. Wenn nicht explizit anders angegeben, sollen sie außerdem stets *irreduzibel* sein.

Definition 3.9. Wenn $\mathbb{G}$ gegeben ist und ein maximaler Torus H gewählt ist, bezeichnen wir mit $N := N_{\mathbb{G}}(H)$ den Normalisator und mit $Z_{\mathbb{G}}(H)$ den Zentralisator des maximalen Torus in $\mathbb{G}$. Die *Weylgruppe* von $\mathbb{G}$ ist dann definiert als $W := N/Z_{\mathbb{G}}(H)$.

Satz 3.10. Die Weylgruppe W von $\mathbb{G}$ wird erzeugt von $\sigma_{\alpha} := [w_{\alpha}(-1)] \in N/Z_{\mathbb{G}}(H)$ für $\alpha \in \Delta$, wenn Δ ein System einfacher Wurzeln in $\Phi(\mathbb{G})$ ist. Die Relationen, die genügen, um W mit den Erzeugern σ_{α} zu präsentieren, sind (für $\alpha, \beta \in \Delta$)

$$\begin{aligned} (W0) \quad & \sigma_{\alpha}^2 = \text{id}; \\ (W2) \quad & \begin{cases} \sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}\sigma_{\alpha}^{-1} = \sigma_{\beta} & \text{falls } \beta\alpha^* = 0; \\ \sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}\sigma_{\alpha}^{-1} = \sigma_{\beta}\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}^{-1} & \text{falls } \beta\alpha^* = \alpha\beta^* = -1; \\ \sigma_{\beta}\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}\sigma_{\alpha}^{-1} = \sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}\sigma_{\alpha}^{-1}\sigma_{\beta} & \text{falls } \beta\alpha^* = -2; \\ \sigma_{\beta}\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}\sigma_{\alpha}^{-1}\sigma_{\beta}^{-1} = \sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}\sigma_{\alpha}^{-1}\sigma_{\beta}^{-1}\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}^{-1}\sigma_{\alpha}^{-1} & \text{falls } \beta\alpha^* = -3; \end{cases} \end{aligned}$$

Das ist [Spr09, 7.1.9 und 8.3.4]. Die Relationen (W0) entsprechen der Tatsache, dass W eine Spiegelungsgruppe ist. Die Relationen (W2) heißen *Zopf-Relationen*. $\diamond$

Analog zur Präsentation der Weylgruppe lässt sich auch der Normalisator des Torus präsentieren, wenn $\mathbb{G}$ über $\mathbb{Z}$ definiert ist, also z.B. wenn $\mathbb{G}$ eine Chevalley-Gruppe ist (auch wenn wir das in dieser Arbeit nicht diskutieren werden). Es sei $\mathcal{N} := N(\mathbb{Z})$, die Gruppe der ganzzahligen Punkte von $N := N_{\mathbb{G}}(H)$, das ist eine zentrale Erweiterung von W durch die abelsche Gruppe $\mathcal{H} := H(\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ von Ordnung 2^r , wobei r der Rang von $\mathbb{G}$ ist.

Lemma 3.11 (Demazure-Tits). Sei die Gruppe $\mathcal{N}'$ präsentiert durch Erzeuger w_{α} und Relationen (W1), (W2), (W3) (für alle $\alpha, \beta \in \Delta$):

$$\begin{aligned} (W1) \quad & h_{\alpha}w_{\beta}h_{\alpha}^{-1} = w_{\beta}^{(-1)^{\beta\alpha^*}} \text{ wobei wir } h_{\alpha} := w_{\alpha}^2 \text{ notieren.}; \\ (W2) \quad & \begin{cases} w_{\alpha}w_{\beta}w_{\alpha}^{-1} = w_{\beta} & \text{falls } \beta\alpha^* = 0; \\ w_{\alpha}w_{\beta}w_{\alpha}^{-1} = w_{\beta}w_{\alpha}w_{\beta}^{-1} & \text{falls } \beta\alpha^* = \alpha\beta^* = -1; \\ w_{\beta}w_{\alpha}w_{\beta}w_{\alpha}^{-1} = w_{\alpha}w_{\beta}w_{\alpha}^{-1}w_{\beta} & \text{falls } \beta\alpha^* = -2; \\ w_{\beta}w_{\alpha}w_{\beta}w_{\alpha}^{-1}w_{\beta}^{-1} = w_{\alpha}w_{\beta}w_{\alpha}^{-1}w_{\beta}^{-1}w_{\alpha}w_{\beta}^{-1}w_{\alpha}^{-1} & \text{falls } \beta\alpha^* = -3; \end{cases} \\ (W3) \quad & h_{\alpha}^2 = e. \end{aligned}$$

Die Gruppe $\mathcal{N}'$ ist zu $\mathcal{N}$ isomorph via

$$\mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}, \quad w_{\alpha} \mapsto w_{\alpha}(-1).$$

Damit ist also $\mathcal{N}$ schon durch die gegebenen Erzeuger und Relationen präsentiert.

Der volle Beweis findet sich in [BT65, Théorème 7.2, S. 117].

Beweisidee: Dass $\mathcal{N}$ diese Relationen erfüllt, lässt sich durch eine lange Rechnung zeigen.

Sei nun $\mathcal{N}'$ die von den Elementen w_{α} unter den Relationen (W1 – W3) erzeugte Gruppe. Diese ist in natürlicher Weise eine Erweiterung von $\mathcal{N}$. Nach Relation (W1) ist

$$w_{\beta}h_{\alpha}w_{\beta}^{-1} = h_{\alpha}h_{\beta}^{(-1)^{\beta\alpha^*}-1} \text{ und } h_{\beta}h_{\alpha}h_{\beta}^{-1} = h_{\alpha}h_{\beta}^{(-1)^{\beta\alpha^*}-1},$$

3. Chevalley-Gruppen

also erzeugen die Elemente h_α einen Normalteiler $\mathcal{H}'$ in $\mathcal{N}'$, der nach (W3) abelsch von Ordnung 2^r ist. Der Quotient $\mathcal{N}'/\mathcal{H}'$ wird von involutiven Elementen $\bar{w}_\alpha$ erzeugt, die die Relationen (W2) erfüllen. Die Relationen (W2) sind aber nach Satz 3.10 ausschöpfende Relationen für die Weylgruppe in Erzeugern σ_α , daher ist $\mathcal{N}' \simeq \mathcal{N}$. $\diamond$

Definition 3.12. Auf der Weylgruppe W ist eine *Längenfunktion* $l : W \rightarrow \mathbb{N}$ gegeben, die jedem Produkt von Spiegelungen σ_α die Länge einer reduzierten Produktdarstellung zuordnet. Die Länge $l(w)$ ist also die minimale Wortlänge von w in den Erzeugern σ_α , $\alpha \in \Phi$, also

$$l : W \rightarrow \mathbb{N}, \sigma \mapsto \min \left\{ m \in \mathbb{N} \mid \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \Phi : \sigma = \prod_{i=1}^m \sigma_{\alpha_i} \right\}.$$

Zur Längenfunktion siehe auch [Spr09, 8.3.1, S. 142].

Proposition 3.13 (Matsumoto, 6.2). *Sei D ein Monoid und $(d_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ eine durch Δ indizierte Teilmenge von D , die die folgenden Relationen erfüllt:*

$$(W2') \quad \begin{cases} d_\alpha d_\beta = d_\beta d_\alpha & \text{falls } \beta\alpha^* = 0; \\ d_\alpha d_\beta d_\alpha = d_\beta d_\alpha d_\beta & \text{falls } \beta\alpha^* = \alpha\beta^* = -1; \\ (d_\alpha d_\beta)^2 = (d_\beta d_\alpha)^2 & \text{falls } \beta\alpha^* = -2; \\ (d_\alpha d_\beta)^3 = (d_\beta d_\alpha)^3 & \text{falls } \beta\alpha^* = -3; \end{cases}$$

Wenn ein Element $\sigma \in W$ sich auf zwei Weisen als Wort minimaler Länge schreiben lässt, etwa $\sigma = \prod_{i=1}^{l(\sigma)} \sigma_{\alpha_i}$ und $\sigma = \prod_{j=1}^{l(\sigma)} \sigma_{\alpha'_j}$, mit $\alpha_i, \alpha'_j \in \Delta$, so gilt in D bereits

$$\prod_{i=1}^{l(\sigma)} d_{\alpha_i} = \prod_{j=1}^{l(\sigma)} d_{\alpha'_j}.$$

Das ist [Spr09, Proposition 8.3.3]. $\diamond$

Lemma 3.14 (Bruhat-Zerlegung). *Sei $\mathbb{G}$ reduktiv. Wir bezeichnen mit U^+ die von den U^α für $\alpha \in \Phi^+$ erzeugte Untergruppe von $\mathbb{G}(k)$ und abkürzend die k -Punkte des Normalisators des Torus mit $N = N(k)$. Dann gelten:*

(a). *Für alle $n \in N$ ist $U^+ n U^+ \cap N = \{n\}$.*

(b). $\mathbb{G}(k) = U^+ N U^- = U^+ N U^+$.

(c). *Man kann eine Projektion ν auf den Normalisator definieren,*

$$\nu : \mathbb{G}(k) \rightarrow N, \forall u, u' \in U^+ \forall n \in N : \nu(unu') := n.$$

Das ist eine direkte Konsequenz aus [Spr09, 8.3.8 und 8.3.9]. $\diamond$

Proposition 3.15 (Matsumoto, 6.2).

- (a). Sei $\Delta' \subset \Delta$ und $W' \subset W$ die von den σ_α für $\alpha \in \Delta'$ erzeugte Untergruppe. Dann gibt es in jeder Nebenklasse $\sigma W' \in W/W'$ einen Repräsentanten $\sigma_0 \in \sigma W'$ sodass für alle $\sigma' \in W'$ gilt: $l(\sigma'\sigma_0) = l(\sigma') + l(\sigma_0)$.
- (b). Sei $\beta \in \Phi^+$ und $\sigma, \sigma' \in W$ mit $l(\sigma'\sigma) = l(\sigma') + l(\sigma)$. Wenn nun $\sigma'\sigma\beta \in \Phi^+$ ist, so auch $\sigma\beta \in \Phi^+$.
- (c). Seien $g, g' \in \mathbb{G}(k)$ mit $l(\nu(g)\nu(g')) = l(\nu(g)) + l(\nu(g'))$. Dann ist $\nu(gg') = \nu(g)\nu(g')$.

Das ist [Bou68, Chapter 4, §1, Exercise 3], S. 31]. ◇

3.3. Elementare Untergruppe und derivierte Untergruppe

Wir bezeichnen mit $D(\mathbb{G}) := [\mathbb{G}, \mathbb{G}]$ die *derivierte Untergruppe*, also die von Kommutatoren erzeugte Untergruppe in $\mathbb{G}$. Dies ist ein Gruppenschema und wir warnen, dass im Allgemeinen nicht $D(\mathbb{G}(R)) = D(\mathbb{G})(R)$ gilt, für einen beliebigen Ring R .

Lemma 3.16. Sei $\mathbb{G}$ eine reduktive Gruppe. Dann gibt es für jede Wurzel $\alpha \in \Phi$ einen Gruppenisomorphismus $x_\alpha : \mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} U^\alpha$ auf eine abgeschlossene Untergruppe U^α von $\mathbb{G}$, sodass für alle $h \in H$ und alle $s \in \bar{k}$ gilt:

$$hx_\alpha(s)h^{-1} = x_\alpha(\alpha(h)s).$$

Wählt man einen Torus H und solche Isomorphismen x_α , so ist $\mathbb{G}$ erzeugt von H und den U^α .

Das ist [Spr09, Proposition 8.1.1, S. 132]. ◇

Definition 3.17. Sei $\mathbb{G}$ eine reduktive linear algebraische Gruppe mit fest gewähltem Torus und gewählten Isomorphismen x_α . Wir bezeichnen mit $E(\mathbb{G})$ die von den Wurzeluntergruppen U^α für alle $\alpha \in \Phi$ erzeugte Untergruppe von $\mathbb{G}$. Die Bilder der Isomorphismen $x_\alpha : \mathbb{G}_a \rightarrow U^\alpha$ heißen *Elementarmatrizen* und $E(\mathbb{G})$ die *elementare Untergruppe* von $\mathbb{G}$.

Bemerkung 3.18. Ist $\mathbb{G}$ reaktiv, so ist $D(\mathbb{G})$ halbeinfach und $\mathbb{G} = R(\mathbb{G}) \cdot D(\mathbb{G})$, nach [Spr09, 8.1.5]. Ist $\mathbb{G}$ halbeinfach, so erzeugen die U_α für $\alpha \in \Phi$ bereits $\mathbb{G}$ und $\mathbb{G} = D(\mathbb{G})$, nach [Spr09, 8.1.6]. Wir warnen wiederum davor, dass dies Aussagen über Gruppenschemata sind, nicht über R -wertige Punkte für einen Ring R .

3.4. Chevalley-Gruppen und K-Theorie

Definition 3.19. Sei $\mathbb{G}$ eine glatte, zusammenhängende linear algebraische Gruppe $\mathbb{G}$ über einem Körper k . Die Gruppe $\mathbb{G}$ heißt *einfach*, wenn sie keine nicht-trivialen Normalteiler hat. Die Gruppe $\mathbb{G}$ heißt *fast einfach*, wenn sie endliches Zentrum Z hat und $\mathbb{G}/Z$ einfach ist. Die Gruppe $\mathbb{G}$ heißt *Chevalley-Gruppe*, wenn sie halbeinfach und fast einfach ist und ein maximaler Torus k -split ist.

3. Chevalley-Gruppen

Definition 3.20. Ein Morphismus $\mathbb{G}' \rightarrow \mathbb{G}$ zwischen glatten, zusammenhängenden algebraischen Gruppen heißt *Isogenie*, wenn er sowohl ein Gruppenhomomorphismus als auch étale ist.

Ein Morphismus heißt étale, wenn er flach und unverzweigt ist, er heißt étale Überlagerung, wenn er darüber hinaus noch endlich ist, siehe dazu [Mil80, Kapitel 1, §1-§3].

Definition 3.21. Sei $\mathbb{G}$ eine zusammenhängende, halbeinfache Gruppe. Dann heißt $\mathbb{G}$ *einfach zusammenhängend*, wenn es keine nicht-trivialen Isogenien $\mathbb{G}' \rightarrow \mathbb{G}$ von Gruppen $\mathbb{G}'$ nach $\mathbb{G}$ gibt.

Bemerkung 3.22. Eine einfach zusammenhängende halbeinfache Gruppe ist also eine halbeinfache Gruppe ohne étale Überlagerungen durch Gruppen. Man kann zeigen, dass jede étale Überlagerung bereits eine algebraische Gruppenstruktur trägt, damit ist eine halbeinfache Gruppe also einfach zusammenhängend genau dann, wenn $\pi_1^{\text{ét}}$ verschwindet. Das werden wir im Folgenden allerdings nicht benötigen.

Satz 3.23 (Steinberg). *Sei $\mathbb{G}$ eine einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe über einem unendlichen Körper k . Die Gruppe $\mathbb{G}(k)$ wird von den Wurzel-Untergruppen $U^\alpha(k)$ erzeugt mit den Erzeugern $x_\alpha : k \rightarrow U^\alpha(k)$, also $U^\alpha(k) = \{x_\alpha(t) \mid t \in k\}$. Setze*

$$w_\alpha(u) := x_\alpha(u)x_{-\alpha}(-u^{-1})x_\alpha(u), \quad h_\alpha(u) := w_\alpha(u)w_\alpha(1)^{-1},$$

dann sind Abbildungen $w_\alpha : k^\times \rightarrow N$, dem Normalisator des gewählten maximalen Torus H und $h_\alpha : k^\times \rightarrow H$ definiert. Die Elemente $w_\alpha(u)$ repräsentieren damit Elemente der Weylgruppe $W = N/H$. Das Element $w_\alpha(1) \in N$ ist ein kanonischer Repräsentant für die Spiegelung $\sigma_\alpha \in W$ an der Wurzel $\alpha \in \Phi$.

Dann erfüllen die Erzeuger x_α in $\mathbb{G}(k)$ die Relationen (für $\alpha \in \Phi$)

$$\begin{aligned} \text{(R1)} \quad & \forall u, v \in k : \quad x_\alpha(u)x_\alpha(v) = x_\alpha(u+v) \\ \text{(R2 i)} \quad & \forall \beta \in \Phi : \alpha + \beta \neq 0 \quad \forall u, v \in k : \quad [x_\alpha(u), x_\beta(v)] = \prod_{i,j \in \mathbb{N}} x_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha,\beta;i,j} u^i v^j) \\ \text{(R2 ii)} \quad & \forall u \in k^\times \quad \forall v \in k : \quad w_\alpha(u)x_\alpha(v)w_\alpha(u)^{-1} = x_{-\alpha}(-u^{-2}v) \\ \text{(R3)} \quad & \forall u, v \in k^\times : \quad h_\alpha(u)h_\alpha(v) = h_\alpha(uv) \end{aligned}$$

Diese Relationen sind ausreichend, um $\mathbb{G}(k)$ zu präsentieren. Die Zahlen $N_{\alpha,\beta;i,j} \in \mathbb{Z}$ die hier auftreten, heißen Strukturkonstanten von $\mathbb{G}$. Die genauen Werte sind hier nicht relevant. Relation (R2i) heißt auch Chevalley-Kommutator-Formel und wir verwenden die Konvention, nach der $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ ist.

Der Beweis stammt ursprünglich von Steinberg [Ste62]. Ein zeitgenössischer Beweis für reduktive Gruppen steht bei [Spr09, Theorem 9.4.3., S. 165]. $\diamond$

Bemerkung 3.24. Es gibt bis auf Isomorphie genau eine einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe für jedes Wurzelsystem Φ . Man spricht daher auch von der Chevalley-Gruppe $\mathbb{G}(\Phi)$ vom universellen Typ.

Wir benötigen in Kapitel 6 Chevalley-Gruppen über Polynomringen.

Lemma 3.25 (Suslin, Vorst). *Für $r \geq 3$ und einen regulären kommutativen Ring A mit 1 ist für alle $i \in \mathbb{N}$*

$$\mathrm{GL}_r(A[t_1, \dots, t_i]) = \mathrm{GL}_r(A) \cdot E_r(A[t_1, \dots, t_i]),$$

wenn A die Lokalisierung einer endlich erzeugten k -Algebra für einen Körper k ist (man sagt auch, A ist von essentiell endlichem Typ über k).

Das ist [Vor81, Theorem 3.3., S. 506], aufbauend auf dem Fall, dass A ein Körper ist, den Suslin in [Sus77, Theorem 5.1, S. 232] bewiesen hat. $\diamond$

Wir betrachten, wieso $r \geq 3$ im vorigen Satz eine notwendige Bedingung ist.

Beispiel 3.26. Die *Cohn-Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 1 + xy & x^2 \\ -y^2 & 1 - xy \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(k[x, y])$$

lässt sich nicht in Elementarmatrizen faktorisieren (nach [Coh66]). Hingegen kann man $A \oplus \mathrm{Id} \in \mathrm{SL}_3(k[x, y])$ in Elementarmatrizen faktorisieren.

Satz 3.27. *Ist $\mathbb{G}$ eine einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe von Rang ≥ 2 und k ein Körper, so ist für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{G}(k[t_1, \dots, t_n]) = \mathbb{G}(k) \cdot E(k[t_1, \dots, t_n]),$$

wobei $E = E(\mathbb{G})$ die elementare Untergruppe von $\mathbb{G}$ bezeichnet.

In [Wen10, Proposition 4.7, S. 271] wird diese Aussage nicht nur für Körper, sondern allgemeiner für Dedekindringe bewiesen. Die grobe Beweisstrategie ist eine Adaption des Beweises von Lemma 3.25 aus [Abe83, Theorem 3.8. (ii), S. 1302]. $\diamond$

Definition 3.28. Sei Φ ein Wurzelsystem und R ein Ring. Sei $\mathbb{G}(\Phi)$ eine einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe mit Wurzelsystem Φ und elementarer Untergruppe $E(\Phi)$. Dann heißt

$$K_1(\Phi, R) := \mathbb{G}(\Phi, R)/E(\Phi, R)$$

die *erste instabile K-Theorie von R bezüglich Φ* .

Bemerkung 3.29. Die Menge $K_1(\Phi, R)$ ist im Allgemeinen keine Gruppe, da $E(\Phi, R)$ nicht für alle Φ und alle R Normalteiler in $\mathbb{G}(\Phi, R)$ ist.

Die stabile erste K-Theorie ist dann $K_1(R) := \varinjlim_n K_1(A_n, R)$, was mit der zuvor gegebenen Definition übereinstimmt. Satz 3.27 ist äquivalent zur Aussage, dass $K_1(\Phi, k[t_1, \dots, t_n]) \simeq K_1(\Phi, k)$ ist, für Φ das Wurzelsystem von $\mathbb{G}$, denn $E(\Phi, k[t_1, \dots, t_n]) \cap \mathbb{G}(\Phi, k) = E(\Phi, k)$.

Satz 3.30 (Abe). *Für einen lokalen Ring R ist $E(\Phi, R) = \mathbb{G}(\Phi, R)$ und damit $K_1(\Phi, R) = 0$.*

Das ist [Abe69, Proposition 1.6, S. 477]. $\diamond$

Nun können wir die zentralen Objekte dieser Arbeit definieren:

3. Chevalley-Gruppen

Definition 3.31. Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $\mathbb{G}$ eine einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe mit Wurzelsystem Φ . Sei $\text{St}(\Phi, R)$ die Gruppe, die von den Symbolen $\tilde{x}_\alpha(u)$ mit $u \in R$ erzeugt wird und nur die Relationen (R1, R2) aus 3.23 erfüllt. Dann gibt es eine Quotientenabbildung $\text{St}(\Phi, R) \twoheadrightarrow E(\Phi, R)$, deren Kern wir mit $K_2(\Phi, R)$ bezeichnen und *instabile zweite K-Theorie zum Wurzelsystem Φ von R* nennen.

Satz 3.32 (Steinberg). *Die Gruppe $K_2(\Phi, k)$ liegt im Zentrum von $\text{St}(\Phi, k)$ und $\text{St}(\Phi, k) \twoheadrightarrow \mathbb{G}(\Phi, k)$ ist die universelle perfekte zentrale Erweiterung von $\mathbb{G}(k)$.*

Dass $\text{St}(\Phi, k) \twoheadrightarrow \mathbb{G}(k)$ eine zentrale Erweiterung ist, ist genau [Ste62, Théorème 3.1, S. 114]. Dass es sich dabei bereits um die universelle perfekte zentrale Erweiterung handelt, ist [Ste62, Théorème 4.1, S. 115]. $\diamond$

Bemerkung 3.33. Manchmal notiert man auch $K_2(n, R) := K_2(A_{n-1}, R)$ und nennt dies einfach *instabile zweite K-Theorie* von R . Die stabile zweite K-Theorie ist dann $K_2(R) := \varinjlim_n K_2(n, R)$, was mit Definition 2.28 übereinstimmt.

Satz 3.34 (Kervaire, van der Kallen). *Für einen kommutativen Ring R und $n \geq 4$ ist*

$$K_2(A_n, R) \hookrightarrow \text{St}(A_n, R) \twoheadrightarrow E(A_n, R)$$

eine universelle perfekte zentrale Erweiterung.

Die Aussage wurde stabil in [Ker70] bewiesen, siehe z.B. [Mil71, Theorem 5.10, S. 47]. Die instabile Aussage stammt aus [Kal77a, Corollary 2, S. 305]. $\diamond$

Vermutung 3.35. *Für Wurzelsysteme Φ mit $\text{rk } \Phi \geq 4$ und lokale Ringe R gilt:*

$$K_2(\Phi, R) \hookrightarrow \text{St}(\Phi, R) \twoheadrightarrow \mathbb{G}(\Phi, R)$$

ist eine universelle perfekte zentrale Erweiterung.

Der Beweis sollte (für nicht-symplektische Wurzelsysteme wenigstens) analog zum Beweis von Steinberg/Kervaire bzw. van der Kallen funktionieren, da auch diese nur mit Elementarmatrizen der SL_n bzw. einer anderen Präsentation von St_n durch Elementarmatrizen arbeiten. Die Einschränkung auf lokale Ringe ist sinnvoll, da nach dem Satz von Abe für lokale Ringe R bereits $\mathbb{G}(\Phi, R) = E(\Phi, R)$ ist. Wir haben bereits gesehen, dass Perfektheit von $E(\Phi, R)$ notwendige Voraussetzung ist - dies ist in [Ste71, Corollary 4.4, S. 981] bewiesen, wenn der Rang von Φ ohnehin ≥ 3 ist.

3.5. Äußere Automorphismen von Wurzelsystemen

Lemma 3.36. *Nach der Klassifikation aller irreduziblen reduzierten Wurzelsysteme von halbeinfachen Lie-Algebren über ihre zusammenhängenden Dynkin-Diagramme treten die folgenden Wurzelsysteme auf: A_n ($n \geq 1$), B_n ($n \geq 1$), C_n ($n \geq 1$), D_n ($n \geq 3$), G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , E_8 wobei die Wurzelsysteme A_n , B_n , C_n , D_n als klassisch bezeichnet werden, die anderen als exzeptionell. Der Index bezeichnet den Rang des Wurzelsystems. Die Wurzelsysteme C_n heißen symplektisch, insbesondere ist also $A_1 = C_1$ symplektisch, A_n für $n \geq 2$ jedoch nicht-symplektisch.*

3.5. Äußere Automorphismen von Wurzelsystemen

Dies ist eine Aufzählung der “klassischen” irreduziblen reduzierten Wurzelsysteme mit einfach zusammenhängenden Chevalley-Gruppen, die die entsprechenden Wurzelsysteme haben:

- $A_n, n \geq 2$: SL_{n+1}
- $B_n, n \geq 3$: $Spin_{n,n+1}$
- $C_n, n \geq 1$: Sp_{2n}
- $D_n, n \geq 3$: $Spin_{n,n}$

Lemma 3.37. *Die einzigen Automorphismen von irreduziblen reduzierten Wurzelsystemen, die von Automorphismen der entsprechenden Dynkin-Diagramme induziert werden, sind die folgenden:*

- (a). *Auf dem Dynkin-Diagramm von A_n für $n \geq 2$ operiert $\alpha_i \mapsto \alpha_{n+1-i}$, die Fixpunkte sind für n gerade das Dynkin-Diagramm von $A_{n/2}$ und für n ungerade $C_{(n+1)/2}$.*
- (b). *Auf dem Dynkin-Diagramm von D_4 operiert die S_3 via Permutation der Endknoten. Je nach Permutation bilden die Fixpunkte entweder das Dynkin-Diagramm von A_1 oder A_2 .*
- (c). *Auf dem Dynkin-Diagramm von D_n für $n \geq 5$ operiert $\alpha_n \mapsto \alpha_{n-1}$, $\alpha_{n-1} \mapsto \alpha_n$, $\alpha_i \mapsto \alpha_i$ sonst. Die Fixpunkte bilden das Dynkin-Diagramm von A_{n-1} .*
- (d). *Auf dem Dynkin-Diagramm von E_6 operiert das simultane Vertauschen von α_3 mit α_5 und α_1 mit α_6 , die Fixpunkte bilden das Dynkin-Diagramm von A_2 .*

Auf diese Weise erhält man Einbettungen der entsprechenden Fixpunkte in die größeren Wurzelsysteme.

Diese Eigenschaften lassen sich sämtlich am Dynkin-Diagramm ablesen. Für eine ausführlichere Diskussion siehe [Bou68, Chapter VI, §4]. $\diamond$

Wenn man die Fixpunkte eines Automorphismus s nicht auf Ebene der Dynkin-Diagramme betrachtet, sondern auf Ebene der Wurzelsysteme die “Ko-varianten” $\Phi^s := \Phi/(\text{id} - s)\Phi$, erhält man andere Einbettungen von Wurzelsystemen:

Lemma 3.38. *Für die durch die Dynkin-Diagramm-Automorphismen aus Lemma 3.37 induzierten Automorphismen s eines Wurzelsystems Φ gilt das folgende, wenn wir $\Phi^s := \Phi/(\text{id} - s)\Phi$ betrachten:*

- (a). *Ist $\Phi = A_{2n}$ mit $n \geq 1$, so ist $\Phi^s \simeq A_n$.*
- (b). *Ist $\Phi = A_{2n+1}$, so ist $\Phi^s \simeq C_n$.*
- (c). *Ist $\Phi = D_4$, so ist $\Phi^s \simeq G_2$.*
- (d). *Ist $\Phi = D_{n+1}$ mit $n \geq 4$, so ist $\Phi^s \simeq B_n$.*
- (e). *Ist $\Phi = E_6$, so ist $\Phi^s \simeq F_4$.*

3. Chevalley-Gruppen

Somit erhält man Einbettungen $C_n \hookrightarrow A_{2n+1}$, $G_2 \hookrightarrow D_4$, $B_n \hookrightarrow D_{n+1}$ und $F_4 \hookrightarrow E_6$. In jedem Fall, außer für $C_n \hookrightarrow A_{2n+1}$, ist stets eine lange Wurzel des größeren Wurzelsystems bereits in dem kleineren enthalten.

Diese Eigenschaften lassen sich sämtlich am Wurzelsystem ablesen. Für eine ausführlichere Diskussion siehe den Beweis von [Spr09, Lemma 10.3.6, S. 183]. $\diamond$

Wir werden diese Aussage später verwenden, um uns auf dem Fall der Wurzelsysteme vom Typ A, C, D zurückziehen zu können.

4. Matsumotos Satz

4.1. Der Satz von Matsumoto

Wir führen hier zunächst die Objekte ein, die im Satz von Matsumoto eine Rolle spielen. Dann stellen wir den Satz vor und geben eine grobe Beweisidee, die dann im folgenden Kapitel ausführlich ausgeführt wird.

Sei $\mathbb{G}$ eine einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe über einem perfekten Körper k und $\mathbb{G}(k)$ die Gruppe der k -rationalen Punkte. Wir wählen einen maximalen Torus H und bezeichnen mit $\Phi := \Phi(\mathbb{G})$ das Wurzelsystem, mit Φ^+ eine feste Wahl positiver Wurzeln, mit $\Delta \subseteq \Phi^+$ einfache Wurzeln und mit $x_\alpha : \mathbb{G}_a \rightarrow U^\alpha$ eine feste Wahl von Erzeugern von $\mathbb{G}$.

Definition 4.1. Sei $A \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} \mathbb{G}(k)$ eine zentrale Erweiterung von $\mathbb{G}(k)$ durch A . Dann liften Erzeuger $x_\alpha^k : k \rightarrow U^\alpha(k)$ der Wurzeluntergruppen auf E zu Isomorphismen $\tilde{x}_\alpha : k \rightarrow \tilde{U}^\alpha$, wobei $\tilde{U}^\alpha = \pi^{-1}(U^\alpha)$ ist. Setze für $u \in k^\times$

$$\tilde{w}_\alpha(u) := \tilde{x}_\alpha(u)\tilde{x}_{-\alpha}(-u^{-1})\tilde{x}_\alpha(u), \quad \tilde{h}_\alpha(u) := \tilde{w}_\alpha(u)\tilde{w}_\alpha(1)^{-1},$$

dadurch sind Homomorphismen $\tilde{w}_\alpha : k^\times \rightarrow \tilde{N}$ und $\tilde{h}_\alpha : k^\times \rightarrow \tilde{H}$ definiert, wobei wieder $\tilde{N} = \pi^{-1}(N)$ und $\tilde{H} = \pi^{-1}(H)$ ist. Jede Wurzel $\alpha \in \Phi$ definiert eine Abbildung $c_\alpha : k^\times \times k^\times \rightarrow E$:

$$c_\alpha(s, t) := \tilde{h}_\alpha(s)\tilde{h}_\alpha(t)\tilde{h}_\alpha(st)^{-1}.$$

Dies ist eigentlich eine Abbildung nach A , denn das Bild in $\mathbb{G}(k)$ ist bereits trivial.

Lemma 4.2. *Die Lifts der Erzeuger erhält man, indem man die Erzeuger zur universellen zentralen Erweiterung liftet wie in Definition 3.31 und dann auf die gegebene zentrale Erweiterung projiziert.* $\diamond$

Definition 4.3. Sei $U^\pm := \prod_{\alpha \in \Phi^\pm} U^\alpha$ und entsprechend

$$\tilde{U}^+ := \prod_{\alpha \in \Phi^+} \tilde{U}^\alpha, \quad \tilde{U}^- := \prod_{\alpha \in \Phi^-} \tilde{U}^\alpha.$$

Für $n \in N$ definieren wir $U_n^+ := U^+ \cap nU^+n^{-1}$ und $\tilde{U}_n^+ := \pi^{-1}(U_n^+)$.

Zum Rechnen in der Erweiterung ist es unerlässlich, die Operation der Weylgruppe auf der Erweiterung zu verstehen. Dabei hilft uns das folgende Lemma.

Lemma 4.4 (Steinberg; Matsumoto, 5.1).

- (a). Der Homomorphismus $\pi : E \twoheadrightarrow \mathbb{G}(k)$ induziert einen Isomorphismus $\tilde{U}^+ \xrightarrow{\sim} U^+$ (sowie $\tilde{U}^- \xrightarrow{\sim} U^-$).
- (b). Sei $\sigma_\alpha \in W$ die zur Wurzel $\alpha \in \Phi$ assoziierte Spiegelung an der Normalen zu α , dann ist für alle $\alpha, \beta \in \Phi$:

$$\forall t \in k^\times \quad \forall u \in k \quad \exists \eta \in \{-1, +1\} : \tilde{w}_\alpha(t)\tilde{x}_\beta(u)\tilde{w}_\alpha(t)^{-1} = \tilde{x}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta t^{-\beta\alpha^*} u).$$

4. Matsumotos Satz

(c). Die Zahlen $\eta \in \{-1, +1\}$ hängen nur von α, β ab:

$$\begin{aligned}\eta(\alpha, \beta) &= \eta(\alpha, -\beta), \\ \eta(\alpha, \alpha) &= \eta(\alpha, -\alpha) = -1, \\ \eta(\alpha, \beta) &= \begin{cases} +1 & \text{wenn } \alpha \pm \beta \notin \Phi \cup \{0\}, \\ -1 & \text{wenn } \alpha \pm \beta \in \Phi, \alpha\beta^* = 0, \end{cases} \\ \eta(\alpha, \beta)\eta(\beta, \alpha) &= -1, \text{ wenn } \alpha\beta^* = \beta\alpha^* = -1.\end{aligned}$$

Das ist (in anderer Notation) [Ste62, 7.2]. ◇

Definition 4.5. Sei $\alpha \in \Delta$ lange Wurzel. Wir nennen $c_E := c_\alpha$ den *Kozykel zu E* bezüglich der Isomorphismen x_α .

Wir bemerken noch, dass wir später zeigen können, dass die Kozykel c_α für verschiedene lange Wurzeln $\alpha \in \Phi$ übereinstimmen, sodass diese Definition nicht von der Wahl einer langen Wurzel abhängt.

Definition 4.6. Ein *Steinberg-Kozykel* über k mit Werten in einer abelschen Gruppe A ist eine Abbildung $c : k^\times \times k^\times \rightarrow A$, die die folgenden Bedingungen erfüllt

$$\begin{aligned}(S1) \quad & c(x, y)c(xy, z) = c(x, yz)c(y, z); \\ (S2) \quad & c(1, 1) = 1; \quad c(x, y) = c(x^{-1}, y^{-1}); \\ (S3) \quad & c(x, y) = c(x, (1-x)y) \text{ für } x \neq 1.\end{aligned}$$

Die Gruppe aller Steinberg-Kozykel über k mit Werten in A wird mit $S(k^\times, A)$ bezeichnet. Nach Definition 2.33 ist ein Steinberg-Kozykel $c \in S(k^\times, A)$ ein Homomorphismus $k^\times \times k^\times \rightarrow A$, der über $K_2^{Sp}(k)$ faktorisiert, d.h. $S(k^\times, A) \simeq \text{Hom}(K_2^{Sp}(k), A)$.

Definition 4.7. Erfüllt eine Abbildung $c : k^\times \times k^\times \rightarrow A$ in eine abelsche Gruppe A die Bedingungen

$$\begin{aligned}(S^\circ 1) \quad & c(x, yz) = c(x, y)c(x, z); \\ (S^\circ 2) \quad & c(xy, z) = c(x, z)c(y, z); \\ (S^\circ 3) \quad & c(x, 1-x) = 1, \text{ wenn } x \neq 1.\end{aligned}$$

so nennt man c einen *bilinearen Steinberg-Kozykel* und schreibt für die Gruppe aller bilinearen Steinberg-Kozykel auch $S^\circ(k^\times, A)$. Nach Definition 2.31 ist ein bilinearer Steinberg-Kozykel $c \in S^\circ(k^\times, A)$ ein Homomorphismus $k^\times \times k^\times \rightarrow A$, der über $K_2^M(k)$ faktorisiert, d.h. $S^\circ(k^\times, A) \simeq \text{Hom}(K_2^M(k), A)$.

Lemma 4.8 (Matsumoto, 5.6). *Bilineare Steinberg-Kozykel sind Steinberg-Kozykel:*

$$S^\circ(k^\times, A) \subseteq S(k^\times, A).$$

Beweis. Aus der Surjektion $K_2^{Sp}(k) \twoheadrightarrow K_2^M(k)$ von Lemma 2.36 erhält man eine

Injektion $\text{Abb}(K_2^{Sp}(k), A) \hookrightarrow \text{Abb}(K_2^M(k), A)$ und die Identifikationen $S^\circ(k^\times, A) \simeq \text{Abb}(K_2^M(k), A)$ und $S(k^\times, A) \simeq \text{Abb}(K_2^{Sp}(k), A)$ liefern dadurch eine Injektion

$$S^\circ(k^\times, A) \hookrightarrow S(k^\times, A).$$

Es ist klar, dass es sich um eine mengentheoretische Inklusion in der gemeinsamen Obermenge $\text{Abb}(k^\times \times k^\times, A)$ handelt. $\square$

Lemma 4.9. *Steinberg-Kozykel $c \in S(k^\times, A)$ sind normalisierte 2-Kozykel im Sinne der Gruppenkohomologie, wie in Definition 2.8. Damit definieren sie zentrale Erweiterungen $A \hookrightarrow \varepsilon \twoheadrightarrow k^\times$.*

Beweis. Aus $c \in S(k^\times, A) \simeq \text{Hom}(K_2^{Sp}(k), A)$ folgt bereits, dass c die Relationen für normalisierte 2-Kozykel erfüllt. $\square$

Lemma 4.10. *Die Kozykel $c_E = c_\alpha$ zu einer Erweiterung E und einer langen Wurzel $\alpha \in \Phi$ sind Steinberg-Kozykel, d.h. $c_\alpha \in S(k^\times, A)$. Ist Φ nicht symplektisch, so sind die Kozykel c_α bilinear ($c_\alpha \in S^\circ(k^\times, A)$). Ist Φ symplektisch, so sind die Kozykel c_α bilinear, wenn α keine lange Wurzel ist. Insgesamt ist also*

$$c_E \in S(k^\times, A) \text{ und für } \Phi \text{ nicht symplektisch sogar } c_E \in S^\circ(k^\times, A).$$

Wir werden dieses Lemma in Abschnitt 4.3.1 beweisen, genau genommen den ersten Teil in Lemma 4.33, die Aussage über Bilinearität in Lemma 4.15 (d). $\diamond$

Satz 4.11 (Matsumoto). *Sei k ein unendlicher Körper und $\mathbb{G}$ eine einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe mit Wurzelsystem Φ .*

Hält man für $\mathbb{G}(k)$ und eine abelsche Gruppe A die Wahl Δ einfacher Wurzeln und Isomorphismen $x_\alpha : \mathbb{G}_a \twoheadrightarrow U^\alpha$ fest, so liefert die Zuordnung, die jeder zentralen Erweiterung E von $\mathbb{G}(k)$ durch A den Steinberg-Kozykel c_E zuordnet, einen Isomorphismus $H^2(\mathbb{G}(k); A) \xrightarrow{\sim} S(k^\times, A)$, falls Φ symplektisch ist, und einen Isomorphismus $H^2(\mathbb{G}(k); A) \xrightarrow{\sim} S^\circ(k^\times, A)$, falls Φ nicht symplektisch ist.

Beweisidee. Die Gruppenstruktur auf $H^2(\mathbb{G}(k), A)$ ist die Baer-Summe, die zwei Erweiterungen E, E' einen Quotienten $F =: E + E'$ des Faserprodukts $E \times_{\mathbb{G}(k)} E'$ zuordnet, in dem verschiedene Kopien von A identifiziert werden (siehe Definition 2.1). Damit werden auch die Lifts der Erzeuger x_α von U^α in E bzw. E' in $E \times_{\mathbb{G}(k)} E'$ identifiziert und damit auch die $\tilde{h}_\alpha$. Daher lässt sich der Kozykel $c_E c_{E'}$ in $E \times_{\mathbb{G}(k)} E'$, also auch in F kürzen zu c_F und wir sehen, dass die Abbildung $E \mapsto c_E$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Wenn eine Erweiterung E auf den trivialen Kozykel $c_E = 1$ abgebildet wird, so ist die Erweiterung bereits trivial, denn dann sind alle Kozykel c_α von E auch trivial (wie wir sehen werden) und damit erfüllt E alle Relationen von $\mathbb{G}(k)$, ist also die triviale Erweiterung.

Es bleibt zu zeigen, dass es zu jedem Steinberg-Kozykel $c \in S(k^\times, A)$ auch eine zentrale Erweiterung $E \in H^2(\mathbb{G}(k); A)$ gibt, sodass $c_E = c$ ist. Das werden wir in Abschnitt 4.3 beweisen, stellen hier aber die grobe Strategie vor:

Man reduziert zunächst die Fälle der Wurzelsysteme B_n, F_4, G_2 auf die Wurzelsysteme D_{n+1}, E_6, D_4 . In Abschnitt 4.3.1 werden einige Eigenschaften für geliftete

Elementarmatrizen $\tilde{x}_\alpha$ nachgerechnet und gezeigt, dass die Kozykel c_α zu einer Erweiterung und einer langen Wurzel Steinberg-Kozykel sind, die nicht von der Wahl der Wurzel α abhängen. Es wird gezeigt, wann die c_α bilinear sind. In Abschnitt 4.3.2 wird für einen vorgegebenen Kozykel mit Koeffizienten A eine Erweiterung des Torus von $\mathbb{G}$ konstruiert. In Abschnitt 4.3.3 wird eine zyklische Erweiterung des Normalisators über den ganzen Zahlen konstruiert, die auf der zuvor konstruierten Erweiterung des Torus operiert. In Abschnitt 4.3.4 liefert ein Quotient des entsprechenden semidirekten Produkts eine Erweiterung des Normalisators. Die Quotientenbildung ist notwendig, um die ganzen Punkte des Torus in der Erweiterung des Torus mit dem Torus in der Erweiterung der ganzen Punkte des Normalisators zu identifizieren. In Abschnitt 4.3.5 wird schließlich eine Menge S durch Pullback der Erweiterung des Normalisators entlang der Bruhat-Zerlegung definiert. Eine Transformationsgruppe von S wird definiert, von der zunächst gezeigt wird, dass sie transitiv operiert, dann auch, dass sie einfach transitiv operiert. Damit lässt sich auf S eine Gruppenstruktur festlegen (die der Transformationsgruppe) und eine Projektion auf $\mathbb{G}(k)$ gegeben. Von dieser Projektion wird nachgerechnet, dass der Kern genau A ist, indem in Abschnitt 4.3.6 gezeigt wird, dass dies der Fall ist, wenn es im Rang 1 und 2 Fall gilt. In Abschnitt 4.3.7 wird dann der Rang 1 und 2 Fall nachgerechnet. $\square$

Korollar 4.12. *Für Φ symplektisch ist $K_2(\Phi, k) \simeq K_2^{Sp}(k)$ und sonst $K_2(\Phi, k) \simeq K_2^M(k)$. Insbesondere lässt sich die zweite stabile K-Theorie bereits instabil mit SL_n für $n \geq 3$ ausrechnen, d.h.*

$$K_2(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_2(A_n, k); \quad K_2(A_n, k) = K_2^M(k) \text{ für } n \geq 3,$$

$$K_2(C_n, k) = K_2^{Sp}(k) \text{ für } n \geq 1.$$

4.2. Zur Geschichte des Satzes

Steinberg [Ste62] hat die universelle zentrale Erweiterung der k -rationalen Punkte von einfach zusammenhängenden Chevalley-Gruppen präsentiert. Moore [Moo68, Kapitel III, Theorem 9.2] hat für die Chevalley-Gruppe SL_2 den Kern der universellen zentralen Erweiterung präsentiert. Matsumoto hat dann den hier vorgestellten Satz bewiesen und damit also die instabile zweite K-Theorie eines unendlichen Körpers präsentiert. Milnor hat in [Mil71, §12] den Beweis für die SL_n mit Matrizen vereinfacht dargestellt um so die stabile zweite K-Theorie eines Körpers zu präsentieren, also einen stabilen Isomorphismus $K_2^M(k) \xrightarrow{\sim} K_2(k)$ zu erhalten. Keune konstruierte in [Keu75] eine Linksinverse zu der Verknüpfung von Abbildungen $K_2^M(k) \rightarrow K_2(k) \rightarrow K_1(k[t], (t^2 - t))$ und gab somit einen alternativen Beweis der Isomorphie $K_2^M(k) \simeq K_2(k)$. Van der Kallen, Maazen und Stienstra haben in [KMS75] für gewisse Ringe R , z.B. R lokal, den Kern von $K_2(A_n, R) \rightarrow K_2(R)$ präsentiert. Van der Kallen hat Matsumotos Satz in [Kal77b] auf lokale Ringe verallgemeinert, deren Restklassenkörper unendlich viele Elemente hat. Rehmann bewies in seiner Habilitationsschrift [Reh78] mit ähnlichen Methoden wie Matsumoto, dass $K_2(D)$ für jede Divisionsalgebra D eine Matsumoto-Präsentation besitzt. Der klassische Satz von Matsumoto über stabile zweite K-Theorie eines Körpers ist ein Korollar aus dem Satz von Rehmann. Rehmann und

Morita [MR90] haben mit analogen Argumenten eine Matsumoto-Präsentation für den Kern der universellen zentralen Erweiterung von Kac-Moody-Gruppen angegeben. Hutchinson konnte in [Hut90] ohne Steinbergs Präsentation der Steinberggruppe für n und k hinreichend groß die Matsumoto-Präsentation von $H_2(\mathrm{SL}_n(k), \mathbb{Z})$ sowie die Stabilisierung $H_2(\mathrm{SL}_n(k), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_2(\mathrm{SL}_{n+1}(k), \mathbb{Z})$ beweisen durch Studium der $\mathrm{GL}_2(k)$ -Operation auf $\mathbb{P}_k^1$.

4.3. Matsumotos Beweis

In diesem Kapitel wollen wir den Beweis der Existenzaussage in Satz 4.11 etwas genauer studieren. Sämtliche Resultate und Beweise in diesem Kapitel gehen, sofern nicht explizit anders angegeben, auf Matsumoto [Mat69] zurück. Das einzige, was diese Ausarbeitung an Mehrwert bringt, sind ausführlichere Rechnungen und der Wegweiser (Abbildung 10 auf S. 109). Die Notation ist nur sehr geringfügig verändert und nur dann, wenn es das Verständnis erleichtert.

Es ist für die restliche Arbeit nicht nötig, dieses Kapitel zu lesen - allerdings liefert diese eingehende Untersuchung die Motivation für die Beweisstrategie in Kapitel 6. An den entsprechenden Stellen in Kapitel 6 wird dann auch noch einmal auf die entsprechenden Teile des Beweises in diesem Kapitel verwiesen.

Wir beginnen mit der Reduktion des Problems auf gewisse Wurzelsysteme. Nach Lemma 3.38 genügt es, die Aussage von Satz 4.11 für die Wurzelsysteme A_n , C_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 zu beweisen, da die Kozykel einer Erweiterung nur von einer beliebig gewählten langen Wurzel abhängen. Wir werden an der Stelle, an der wir dies verwenden, noch einmal gesondert darauf hinweisen.

4.3.1. Rechenregeln für Lifts $\tilde{x}_\alpha$, $\tilde{h}_\alpha$, $\tilde{w}_\alpha$ und Kozykel c_α

Ausgehend von Definition 4.1 und Lemma 4.4 werden wir nun einige Rechenregeln sammeln, die sämtlich mit elementaren Rechnungen für zwei Wurzeln folgen.

Lemma 4.13 (Rechenregeln, Matsumoto, 5.2).

- (a) $\tilde{w}_\alpha(t)\tilde{w}_\beta(u)\tilde{w}_\alpha(t)^{-1} = \tilde{w}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta t^{-\beta\alpha^*}u),$
- (b) $\tilde{w}_\alpha(t)\tilde{h}_\beta(u)\tilde{w}_\alpha(t)^{-1} = \tilde{h}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta t^{-\beta\alpha^*}u)\tilde{h}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta t^{-\beta\alpha^*})^{-1},$
- (c) $\tilde{h}_\alpha(t)\tilde{x}_\beta(u)\tilde{h}_\alpha(t)^{-1} = \tilde{x}_\beta(t^{\beta\alpha^*}u),$
 $[\tilde{h}_\alpha(t), \tilde{x}_\alpha(u)] = \tilde{x}_\alpha(u(t^2 - 1)),$
- (d) $\tilde{h}_\alpha(t)\tilde{w}_\beta(u)\tilde{h}_\alpha(t)^{-1} = \tilde{w}_\beta(t^{\beta\alpha^*}u),$
- (e) $\tilde{h}_\alpha(t)\tilde{h}_\beta(u)\tilde{h}_\alpha(t)^{-1} = \tilde{h}_\beta(t^{\beta\alpha^*}u)\tilde{h}_\beta(t^{\beta\alpha^*})^{-1},$
- (f) $\tilde{w}_\alpha(1)\tilde{h}_\beta(t)\tilde{w}_\alpha(1)^{-1} = \tilde{h}_\beta(t)\tilde{h}_\alpha(t^{-\alpha\beta^*}),$
- (g) $\tilde{w}_\alpha(t) = \tilde{w}_{-\alpha}(-t^{-1}),$
 $\tilde{h}_\alpha(t) = \tilde{h}_{-\alpha}(t)^{-1},$
 $\tilde{w}_\alpha(1)\tilde{h}_\alpha(t)\tilde{w}_\alpha(1)^{-1} = \tilde{h}_\alpha(t^{-1}),$
- (h) $\tilde{w}_\alpha(1)^{-1}\tilde{x}_\alpha(t)\tilde{w}_\alpha(1) = \tilde{x}_{-\alpha}(-t) = \tilde{x}_\alpha(-t^{-1})\tilde{w}_\alpha(t^{-1})\tilde{x}_\alpha(-t^{-1}),$

4. Matsumotos Satz

wobei wir hier die Konvention $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ verwenden.

Beweisidee. Dies ist (in anderer Notation) [Ste62, 7.3.] und folgt durch elementare Rechnungen aus Lemma 4.4.

Exemplarisch rechnen wir einige Gleichungen nach:

$$\begin{aligned}
& \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{w}_\beta(u) \tilde{w}_\alpha(t)^{-1} \\
&= \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{x}_\beta(u) \tilde{w}_\alpha(t)^{-1} \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{x}_{-\beta}(-u^{-1}) \tilde{w}_\alpha(t)^{-1} \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{x}_\beta(u) \tilde{w}_\alpha(t)^{-1} \\
&= \tilde{x}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta t^{-\beta\alpha^*} u) \tilde{x}_{-\sigma_\alpha(\beta)}(-(\eta t^{-\beta\alpha^*} u)^{-1}) \tilde{x}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta t^{-\beta\alpha^*} u) \\
&= \tilde{w}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta t^{-\beta\alpha^*} u).
\end{aligned}$$

Damit ist (a) gezeigt. Zu (b) ist es kein weiter Schritt:

$$\begin{aligned}
& \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{h}_\beta(u) \tilde{w}_\alpha(t)^{-1} \\
&= \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{w}_\beta(u) \tilde{w}_\beta(1)^{-1} \tilde{w}_\alpha(t)^{-1} \\
&= \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{w}_\beta(u) \tilde{w}_\alpha(t)^{-1} \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{w}_\beta(1)^{-1} \tilde{w}_\alpha(t)^{-1} \\
&= \tilde{w}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta t^{-\beta\alpha^*} u) \tilde{w}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta t^{-\beta\alpha^*})^{-1} \\
&= \tilde{w}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta t^{-\beta\alpha^*} u) \tilde{w}_{\sigma_\alpha(\beta)}(1)^{-1} \tilde{w}_{\sigma_\alpha(\beta)}(1) \tilde{w}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta t^{-\beta\alpha^*})^{-1} \\
&= \tilde{h}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta t^{-\beta\alpha^*} u) \tilde{h}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta t^{-\beta\alpha^*})^{-1}.
\end{aligned}$$

Damit können wir nun auch sofort (e) zeigen:

$$\begin{aligned}
& \tilde{h}_\alpha(t) \tilde{h}_\beta(u) \tilde{h}_\alpha(t)^{-1} \\
&= \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{w}_\alpha(-1) \tilde{h}_\beta(u) \tilde{w}_\alpha(-1)^{-1} \tilde{w}_\alpha(t)^{-1} \\
&= \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{h}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta(-1)^{-\beta\alpha^*} u) \tilde{h}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta(-1)^{-\beta\alpha^*})^{-1} \tilde{w}_\alpha(t)^{-1} \\
&= \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{h}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta(-1)^{-\beta\alpha^*} u) \tilde{w}_\alpha(t)^{-1} \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{h}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta(-1)^{-\beta\alpha^*})^{-1} \tilde{w}_\alpha(t)^{-1} \\
&= \tilde{h}_\beta(t^{-\beta\alpha^*} u) \tilde{h}_\beta(t^{-\beta\alpha^*})^{-1},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt zum einen $\sigma_\alpha^2 = \text{id}$ ausgenutzt haben, zum anderen, um das korrekte Vorzeichen zu erhalten, $\eta(\alpha, \beta) = \eta(\alpha, \sigma_\alpha(\beta))$.

Für (g) rechnen wir

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_\alpha(t) \tilde{w}_{-\alpha}(-t^{-1})^{-1} &= \tilde{x}_\alpha(-t^{-1})^{-1} \tilde{w}_{-\alpha}(-t^{-1}) \tilde{x}_\alpha(t) \tilde{w}_{-\alpha}(-t^{-1})^{-1} \\
&= \tilde{x}_{-\alpha}(t^{-1}) \tilde{x}_{-\alpha}(\eta((-t)^{-1})^{-(\alpha)\alpha^*} t) \\
&= \tilde{x}_{-\alpha}(t^{-1}) \tilde{x}_{-\alpha}(-t^{-2} t) \\
&= \tilde{x}_{-\alpha}(t^{-1} - t^{-1}) = \text{Id}
\end{aligned}$$

und damit dann

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_\alpha(t) \tilde{h}_{-\alpha}(t) &= \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{w}_\alpha(1)^{-1} \tilde{w}_{-\alpha}(t) \tilde{w}_{-\alpha}(1)^{-1} \\
&= \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{w}_{-\alpha}(1) \tilde{w}_{-\alpha}(t) \tilde{w}_{-\alpha}(1)^{-1} \\
&= \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{w}_\alpha(t)^{-1} = \text{Id}.
\end{aligned}$$

Nun rechnen wir noch

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_\alpha(1)\tilde{h}_\alpha(t)\tilde{w}_\alpha(1)^{-1} &= \left(\tilde{w}_\alpha(1)\tilde{h}_{-\alpha}(t)\tilde{w}_\alpha(1)^{-1}\right)^{-1} \\
&= \left(\tilde{h}_\alpha(-t)\tilde{h}_\alpha(-1)^{-1}\right)^{-1} \\
&= \tilde{h}_\alpha(-1)\tilde{h}_\alpha(-t)^{-1} \\
&= \tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{w}_\alpha(1)^{-1}\tilde{w}_\alpha(1)\tilde{w}_\alpha(-t)^{-1} \\
&= \tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{w}_\alpha(-t)^{-1} \\
&= \tilde{w}_{-\alpha}(1)\tilde{w}_{-\alpha}(t^{-1})^{-1} \\
&= \tilde{h}_{-\alpha}(t^{-1})^{-1} \\
&= \tilde{h}_\alpha(t^{-1}).
\end{aligned}$$

Die anderen Teilaussagen folgen ähnlich mühelos. $\square$

Lemma 4.14 (Geliftete Bruhat-Zerlegung, Matsumoto, 5.3).

- (a). Für alle $\tilde{n} \in \tilde{N}$ ist $\tilde{U}^+ \tilde{n} \tilde{U}^+ \cap \tilde{N} = \{\tilde{n}\}$,
(b). Man kann eine Projektion auf $\tilde{N}$ definieren durch

$$\tilde{\nu} : E \rightarrow \tilde{N}, \quad \forall \tilde{u}, \tilde{u}' \in \tilde{U}^+ \quad \forall \tilde{n} \in \tilde{N} : \tilde{\nu}(\tilde{u}\tilde{n}\tilde{u}') := \tilde{n}$$

und es gilt $\nu \circ \pi = \pi \circ \tilde{\nu}$, d.h. $\tilde{\nu}$ ist ein Lift der Bruhat-Zerlegung von $\mathbb{G}(k)$.

- (c). Für alle $\tilde{u} \in \tilde{U}^+$ und alle $\tilde{g} \in E$ ist $\tilde{\nu}(\tilde{u}\tilde{g}) = \tilde{\nu}(\tilde{g})$,
für alle $\tilde{h} \in \tilde{H}$ und alle $\tilde{g} \in E$ ist $\tilde{\nu}(\tilde{h}\tilde{g}) = \tilde{h}\tilde{\nu}(\tilde{g})$.
(d). Für alle $g \in E$ und alle $\alpha \in \Delta$ gibt es $t \in k$ sodass $\tilde{g} = \tilde{u}_1 \tilde{x}_\alpha(t) \tilde{n} \tilde{u}$ mit $\tilde{u}_1 \in \tilde{U}^+$, $\tilde{n} = \tilde{\nu}(\tilde{g}) \in \tilde{N}$ und $\tilde{u} \in \tilde{U}^+$, sodass $\tilde{u}_1$ als Produkt von Elementarmatrizen geschrieben werden kann, ohne die Wurzel α zu verwenden. Wir notieren $\sigma := [\pi(\tilde{n})] \in N/T = W$, das Element der Weylgruppe, welches durch das Bild von $\tilde{n}$ in $\mathbb{G}(k)$ repräsentiert wird. Dann ist

$$\tilde{\nu}(\tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{g}) = \begin{cases} \tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{\nu}(\tilde{g}) & \text{falls } t = 0 \text{ oder } \sigma^{-1}(\alpha) \in \Phi^+, \\ \tilde{h}_\alpha(t^{-1})\tilde{\nu}(\tilde{g}) & \text{falls } t \neq 0 \text{ und } \sigma^{-1}(\alpha) \notin \Phi^+. \end{cases}$$

Beweis.

- (a). Wenn $n \in N$, so ist $U_n^+ = U^+ \cap nU^+n^{-1}$ von gewissen U^β erzeugt. Seien $\tilde{n}, \tilde{n}' \in \tilde{N}$ mit $\pi(\tilde{n}) = n$, $\pi(\tilde{n}') = n' \in N$ und $\tilde{u}, \tilde{u}' \in \tilde{U}^+$ sodass $\tilde{n}' = \tilde{u}\tilde{n}\tilde{u}'$. Dann gilt in $\mathbb{G}(k)$: $n' = un u'$, also $n' = n$, schließlich $\tilde{n}' = \tilde{n}a$ mit $a \in A$. Es ist somit $a = (\tilde{n}^{-1}\tilde{u}\tilde{n})\tilde{u}'$, was bedeutet, dass $\pi(\tilde{u}) = nu'n^{-1} \in U_n^+$ ist, also $\tilde{u} \in \tilde{U}_n^+ = \pi^{-1}(U_n^+)$. Nach Lemma 4.4 permutiert Konjugation mit $\tilde{n}$ nur die $\tilde{U}^\beta$, die $\tilde{U}_n^+$ erzeugen, also ist $\tilde{n}^{-1}\tilde{U}_n^+\tilde{n} \subset \tilde{U}^+$, schließlich auch $a \in \tilde{U}^+$, also $a = \text{Id}$ (denn $\tilde{U}^+ \cap A = \pi^{-1}(U^+) \cap A = \{\text{Id}\}$).

4. Matsumotos Satz

(b). Nach (a) ist die Abbildung wohldefiniert und

$$\nu(\pi(\tilde{u}\tilde{n}\tilde{u}')) = \nu(unu') = n = \pi(\tilde{n}) = \pi(\tilde{\nu}(\tilde{u}\tilde{n}\tilde{u}')).$$

(c). Schreibe $\tilde{g} \in E$ als $\tilde{g} = \tilde{u}'\tilde{n}\tilde{u}''$ mit $\tilde{u}', \tilde{u}'' \in \tilde{U}^+$ und $\tilde{n} \in \tilde{N}$, dann ist

$$\tilde{\nu}(\tilde{u}\tilde{g}) = \tilde{\nu}(\tilde{u}\tilde{u}'\tilde{n}\tilde{u}'') = \tilde{n} = \tilde{\nu}(\tilde{u}'\tilde{n}\tilde{u}'') = \tilde{\nu}(\tilde{g}).$$

Mit Lemma 4.4 gibt es ein $\tilde{u}''' \in \tilde{U}^+$ sodass $\tilde{h}\tilde{u}' = \tilde{u}'''\tilde{h}$, also

$$\tilde{\nu}(\tilde{h}\tilde{g}) = \tilde{\nu}(\tilde{h}\tilde{u}'\tilde{n}\tilde{u}'') = \tilde{\nu}(\tilde{u}'''\tilde{h}\tilde{n}\tilde{u}'') = \tilde{h}\tilde{n} = \tilde{h}\tilde{\nu}(\tilde{u}'\tilde{n}\tilde{u}'') = \tilde{h}\tilde{\nu}(\tilde{g}).$$

(d). Wir stellen zunächst fest, dass (wieder mit Lemma 4.4) die Untergruppe

$$\tilde{U}^+ \cap \tilde{w}_\alpha(1)\tilde{U}^+\tilde{w}_\alpha(1)^{-1}$$

genau die von den $\tilde{U}^\beta$ für $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ erzeugte Untergruppe von $\tilde{U}^+$ ist, die wir mit $\tilde{U}_\alpha^+$ bezeichnen wollen. Außerdem gilt $\tilde{U}^+ = \tilde{U}_\alpha^+\tilde{U}^\alpha$ und $\tilde{U}_\alpha^+ \cap \tilde{U}^\alpha = \{\text{Id}\}$. Schreiben wir $\tilde{g} \in E$ als $\tilde{g} = \tilde{u}\tilde{n}\tilde{u}'$ mit $\tilde{u}, \tilde{u}' \in \tilde{U}^+$ und $\tilde{n} = \tilde{\nu}(\tilde{g}) \in \tilde{N}$, dann ist also $\tilde{u} = \tilde{u}_1\tilde{x}_\alpha(t)$ mit $\tilde{u}_1 \in \tilde{U}_\alpha^+$ und $t \in k$. Wiederum nach Lemma 4.4 ist $\tilde{n}^{-1}\tilde{U}^\alpha\tilde{n} = \tilde{U}^{\sigma^{-1}(\alpha)}$ mit $\sigma = [\pi(\tilde{n})] \in N/T = W$, dem durch $\tilde{n}$ repräsentierten Element in der Weylgruppe W . Jetzt unterscheiden wir zwei Fälle:

- a) $\tilde{n}^{-1}\tilde{x}_\alpha(t)\tilde{n} \in \tilde{U}^+$ (d.h. $\sigma^{-1}\alpha > 0$ oder $t = 0$) oder aber
- b) $\tilde{n}^{-1}\tilde{x}_\alpha(t)\tilde{n} \notin \tilde{U}^+$ (d.h. $\sigma^{-1}\alpha < 0$ und $t \neq 0$).

Im ersten Fall ist

$$\tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{g} = \tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{u}_1\tilde{w}_\alpha(1) \tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{n} \tilde{n}^{-1}\tilde{x}_\alpha(t)\tilde{n} \tilde{u}' = \tilde{u}_2\tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{n}\tilde{u}'_2$$

mit $\tilde{u}_2 \in \tilde{U}_\alpha^+$ und $\tilde{u}'_2 \in \tilde{U}^+$.

Im zweiten Fall ist

$$\begin{aligned} \tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{g} &= \tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{u}_1\tilde{w}_\alpha(1) \tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{x}_\alpha(t)\tilde{w}_\alpha(1) \tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{n}\tilde{u}' \\ &= \tilde{u}_2\tilde{x}_\alpha(-t^{-1})\tilde{w}_\alpha(t^{-1})\tilde{x}_\alpha(-t^{-1}) \tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{n}\tilde{u}', \quad \tilde{u}_2 \in \tilde{U}_\alpha^+ \\ &= \tilde{u}_2\tilde{x}_\alpha(-t^{-1})\tilde{w}_\alpha(t^{-1})\tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{n}\tilde{u}'_2, \quad \tilde{u}'_2 \in \tilde{U}^+. \end{aligned}$$

und somit $\tilde{\nu}(\tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{g}) = \tilde{w}_\alpha(t^{-1})\tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{n} = \tilde{h}_\alpha(t^{-1})\tilde{n}$. □

Lemma 4.15 (Matsumoto, 5.4).

- (a). Für jede Wurzel $\alpha \in \Phi$ ist $c_\alpha(s, t) = c_{-\alpha}(t, s)^{-1}$,
- (b). Für jede Wurzel $\alpha \in \Phi$ und jedes $\sigma \in W$ ist $c_{\sigma(\alpha)} = c_{\pm\alpha}$,
- (c). Für je zwei Wurzeln $\alpha, \beta \in \Phi$ ist $[\tilde{h}_\alpha(s), \tilde{h}_\beta(t)] = c_\alpha(s, t^{\alpha\beta*}) = c_\beta(t, s^{\beta\alpha*})^{-1}$,

(d). Wenn α keine lange Wurzel eines symplektischen Wurzelsystems Φ , so ist c_α bilinear:

$$c_\alpha(s^n, t^m) = c_\alpha(s, t)^{nm} \text{ für } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Beweis.

(a). $c_\alpha(s, t) =$

$$\begin{aligned} (\text{Mit } 1 \text{ multipliziert}) &= \tilde{h}_\alpha(st)^{-1} \tilde{h}_\alpha(st) c_\alpha(s, t) \\ (A \text{ zentral in } E) &= \tilde{h}_\alpha(st)^{-1} c_\alpha(s, t) \tilde{h}_\alpha(st) \\ (\text{Definition } c_\alpha) &= \tilde{h}_\alpha(st)^{-1} \tilde{h}_\alpha(s) \tilde{h}_\alpha(t) \\ (\text{nach Lemma 4.13 g}) &= \tilde{h}_{-\alpha}(ts) \tilde{h}_{-\alpha}(s)^{-1} \tilde{h}_{-\alpha}(t)^{-1} \\ &= c_{-\alpha}(t, s)^{-1}. \end{aligned}$$

(b). Nach Lemma 4.13 (b) gilt für $\beta = \sigma_\alpha \gamma$:

$$\tilde{w}_\alpha(1) \tilde{h}_\gamma(u) \tilde{w}_\alpha(1)^{-1} = \tilde{h}_\beta(\eta u) \tilde{h}_\beta(\eta)^{-1}$$

und für $\eta = 1$ folgt

$$\tilde{w}_\alpha(1) \tilde{h}_\gamma(u) \tilde{w}_\alpha(1)^{-1} = \tilde{h}_\beta(u).$$

Ansonsten ist $\eta = -1$ und somit

$$\begin{aligned} & \tilde{w}_\beta(1) \tilde{w}_\alpha(1) \tilde{h}_\gamma(u) \tilde{w}_\alpha(1)^{-1} \tilde{w}_\beta(1)^{-1} \\ (\text{nach Lemma 4.13 b}) &= \tilde{w}_\beta(1) \tilde{h}_\beta(-u) \tilde{h}_\beta(-1)^{-1} \tilde{w}_\beta(1)^{-1} \\ (1 \text{ eingefügt}) &= \tilde{w}_\beta(1) \tilde{h}_\beta(-u) \tilde{w}_\beta(1)^{-1} \tilde{w}_\beta(1) \tilde{h}_\beta(-1)^{-1} \tilde{w}_\beta(1)^{-1} \\ (\text{nach Lemma 4.13 g}) &= \tilde{h}_\beta(-u^{-1}) \tilde{h}_\beta(-1)^{-1} \\ (\text{Definition } \tilde{h}_\beta) &= \tilde{w}_\beta(-u^{-1}) \tilde{w}_\beta(1)^{-1} \tilde{w}_\beta(1) \tilde{w}_\beta(-1)^{-1} \\ (\text{Kürzen}) &= \tilde{w}_\beta(-u^{-1}) \tilde{w}_\beta(-1)^{-1} \\ (\text{nach Lemma 4.13 g}) &= \tilde{w}_{-\beta}(u) \tilde{w}_{-\beta}(1)^{-1} \\ (\text{Definition } \tilde{h}_{-\beta}) &= \tilde{h}_{-\beta}(u). \end{aligned}$$

Damit ist $c_\gamma(x, y) = \tilde{h}_\gamma(x) \tilde{h}_\gamma(y) \tilde{h}_\gamma(xy)^{-1}$

$$= \begin{cases} \tilde{w}_\alpha(1)^{-1} c_\beta(x, y) \tilde{w}_\alpha(1) \text{ oder} \\ \tilde{w}_\alpha(1)^{-1} \tilde{w}_\beta(1)^{-1} c_{-\beta}(x, y) \tilde{w}_\beta(1) \tilde{w}_\alpha(1) \end{cases}$$

und da $c_{\pm\beta}(x, y) \in A$ zentral in E liegt, sind diese Konjugate bereits $c_{\pm\beta}(x, y)$.

(c). $[\tilde{h}_\alpha(s), \tilde{h}_\beta(t)] = \tilde{h}_\alpha(s) \tilde{h}_\beta(t) \tilde{h}_\alpha(s)^{-1} \tilde{h}_\beta(t)^{-1}$
 $= \tilde{h}_\beta(s^{\beta\alpha^*} t) \tilde{h}_\beta(s^{\beta\alpha^*})^{-1} \tilde{h}_\beta(t)^{-1} = c_\beta(t, s^{\beta\alpha^*})^{-1}$ (nach Lemma 4.13 (e)).

Analog ist

$$\tilde{h}_\alpha(s) \tilde{h}_\beta(t) \tilde{h}_\alpha(s)^{-1} \tilde{h}_\beta(t)^{-1} = \tilde{h}_\alpha(s) \tilde{h}_\alpha(t^{\alpha\beta^*}) \tilde{h}_\alpha(st^{\alpha\beta^*}) = c_\alpha(s, t^{\alpha\beta^*}).$$

4. Matsumotos Satz

- (d). Ist α nicht lange Wurzel eines symplektischen Wurzelsystems, so gibt es stets ein $\beta \in \Phi$ mit $\alpha\beta^* = 1$ (siehe auch Abschnitt A.2), also $c_\alpha(s, t) = [\tilde{h}_\alpha(s), \tilde{h}_\beta(t)]$ nach (c), damit ist c_α bilinear:

$$c_\alpha(xy, z) = [\tilde{h}_\alpha(xy), \tilde{h}_\beta(z)] = [c_\alpha(x, y)^{-1} \tilde{h}_\alpha(x) \tilde{h}_\alpha(y), \tilde{h}_\beta(z)].$$

Da c_α zentral in E ist, vereinfacht sich das zu

$$[\tilde{h}_\alpha(x) \tilde{h}_\alpha(y), \tilde{h}_\beta(z)] = \tilde{h}_\alpha(x) [\tilde{h}_\alpha(y), \tilde{h}_\beta(z)] \tilde{h}_\alpha(x)^{-1} [\tilde{h}_\alpha(x), \tilde{h}_\beta(z)].$$

Diese Kommutatoren sind wieder als c_α ausdrückbar, liegen also im Zentrum von E . Damit sehen wir $c_\alpha(xy, z) = c_\alpha(x, z) c_\alpha(y, z)$. Völlig analog erhält man $c_\alpha(x, yz) = c_\alpha(x, y) c_\alpha(x, z)$.

□

Jetzt können wir Lemma 4.10 beweisen, welches besagte, dass ein Kozykel c_α stets ein Steinberg-Kozykel ist, und wann dieser bilinear ist. Genau genommen beweisen wir zunächst folgendes

Lemma 4.16 (Matsumoto, 5.5). *Ist Φ von Rang 1, also $\Phi = \{\alpha, -\alpha\}$, so ist der Kozykel $c = c_\alpha$ stets ein Steinberg-Kozykel, d.h. $c \in S(k^\times, A)$.*

Beweis. (S1) lässt sich einfach nachrechnen:

$$\begin{aligned} & c(x, y) c(xy, z) \\ \text{(Definition } c(x, y)) &= \tilde{h}(x) \tilde{h}(y) \tilde{h}(xy)^{-1} \tilde{h}(xy) \tilde{h}(z) \tilde{h}(xyz)^{-1} \\ \text{(Kürzen)} &= \tilde{h}(x) \tilde{h}(y) \tilde{h}(z) \tilde{h}(xyz)^{-1} \\ \text{(Definition } c(y, z)) &= \tilde{h}(x) c(y, z) \tilde{h}(yz) \tilde{h}(xyz)^{-1} \\ \text{(A zentral in } E) &= \tilde{h}(x) \tilde{h}(yz) \tilde{h}(xyz)^{-1} c(y, z) \\ \text{(Definition } c(x, yz)) &= c(x, yz) c(y, z). \end{aligned}$$

Für (S2) berechnen wir

$$\begin{aligned} & c(x, y) \\ \text{(Definition } c(x, y)) &= \tilde{h}_\alpha(x) \tilde{h}_\alpha(y) \tilde{h}_\alpha(xy)^{-1} \\ \text{(Lemma 4.13 (g) und Kürzen)} &= \tilde{w}_\alpha(1) \tilde{h}_\alpha(x^{-1}) \tilde{h}_\alpha(y^{-1}) \tilde{h}_\alpha(x^{-1}y^{-1})^{-1} \tilde{w}_\alpha(1)^{-1} \\ \text{(Definition } c(x^{-1}, y^{-1})) &= \tilde{w}_\alpha(1) c(x^{-1}, y^{-1}) \tilde{w}_\alpha(1)^{-1} \\ \text{(A zentral in } E) &= c(x^{-1}, y^{-1}) \tilde{w}_\alpha(1) \tilde{w}_\alpha(1)^{-1} \\ \text{(Kürzen)} &= c(x^{-1}, y^{-1}). \end{aligned}$$

Ebenfalls mit der Definition von c folgt

$$c(1, 1) = \tilde{h}_\alpha(1) \tilde{h}_\alpha(1) \tilde{h}_\alpha(1)^{-1} = \tilde{h}_\alpha(1) = \text{Id}.$$

Der Beweis von (S3) erfordert mehrere Zwischenschritte.

Behauptung (a). $c_\alpha(t, -t^{-1}) = 1$ für alle $t \in k^\times$.

Beweis. Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned}
 & c(t, -t^{-1}) \\
 \text{(Definition } c(t, -t^{-1})) &= \tilde{h}_\alpha(t) \tilde{h}_\alpha(-t^{-1}) \tilde{h}_\alpha(-1)^{-1} \\
 \text{(Definition } \tilde{h}_\alpha) &= \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{w}_\alpha(-1) \tilde{w}_\alpha(-t^{-1}) \tilde{w}_\alpha(-1) \tilde{w}_\alpha(-1)^{-2} \\
 \text{(Kürzen)} &= \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{w}_\alpha(-1) \tilde{w}_\alpha(-t^{-1}) \tilde{w}_\alpha(-1)^{-1} \\
 \text{(nach Lemma 4.13 (a))} &= \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{w}_{\sigma_\alpha(\alpha)}(\eta(-1)^{-\alpha\alpha^*}(-t^{-1})) \\
 \text{(Einsetzen)} &= \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{w}_{-\alpha}(t^{-1}) \\
 \text{(nach Lemma 4.13 (g))} &= \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{w}_\alpha(-t) \\
 \text{(Kürzen)} &= \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{w}_\alpha(t)^{-1} = \text{Id}.
 \end{aligned}$$

Behauptung (b). $c(s, t) = c(t, -s^{-1}t^{-1})$ für alle $s, t \in k^\times$.

Beweis. Wieder rechnen wir nach:

$$\begin{aligned}
 & c(s, t) \\
 \text{(nach a)} &= c(s, t) c(st, -(st)^{-1}) \\
 \text{(S1)} &= c(s, -s^{-1}) c(t, -s^{-1}t^{-1}) \\
 \text{(nach a)} &= c(t, -s^{-1}t^{-1}).
 \end{aligned}$$

Behauptung (c). $c(s, t) = c(-s^{-1}t^{-1}, s)$.

Beweis. Folgt direkt durch zweimaliges Anwenden von (b).

Sei nun $\tilde{g} = \tilde{x}_\alpha(u) \tilde{w}_\alpha(1) \tilde{x}_\alpha(v)$ mit $uv(1 - uv) \neq 0$.

Behauptung (d). $\tilde{\nu}(\tilde{w}_\alpha(-1) \tilde{g} \tilde{w}_\alpha(-1)) = \tilde{h}_\alpha((u - v^{-1})^{-1}) \tilde{h}_\alpha(v^{-1}) \tilde{w}_\alpha(1)$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 & \tilde{w}_\alpha(-1) \tilde{g} \tilde{w}_\alpha(-1) \\
 \text{(Definition } \tilde{g}) &= \tilde{w}_\alpha(-1) \tilde{x}_\alpha(u) \tilde{w}_\alpha(1) \tilde{x}_\alpha(v) \tilde{w}_\alpha(-1) \\
 \text{(nach Lemma 4.13 h)} &= \tilde{w}_\alpha(-1) \tilde{x}_\alpha(u) \tilde{x}_{-\alpha}(-v) \\
 \text{(Definition } \tilde{w}_\alpha(v^{-1})) &= \tilde{w}_\alpha(-1) \tilde{x}_\alpha(u) \tilde{x}_\alpha(-v^{-1}) \tilde{w}_\alpha(v^{-1}) \tilde{x}_\alpha(-v^{-1}) \\
 \text{(\tilde{x}_\alpha Homomorphismus)} &= \tilde{w}_\alpha(-1) \tilde{x}_\alpha(u - v^{-1}) \tilde{w}_\alpha(v^{-1}) \tilde{x}_\alpha(-v^{-1}).
 \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.14 und $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha \notin \Phi^+$ sowie $u - v^{-1} \neq 0$ wissen wir

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\nu}(\tilde{w}_\alpha(-1) \tilde{g} \tilde{w}_\alpha(-1)) \\
 &= \tilde{\nu}(\tilde{w}_\alpha(-1) \tilde{x}_\alpha(u - v^{-1}) \tilde{w}_\alpha(v^{-1}) \tilde{x}_\alpha(-v^{-1})) \\
 &= \tilde{h}_\alpha((u - v^{-1})^{-1}) \tilde{w}_\alpha(v^{-1}).
 \end{aligned}$$

Behauptung (e). $\tilde{\nu}(\tilde{w}_\alpha(-1) \tilde{g} \tilde{w}_\alpha(-1)) = \tilde{h}_\alpha(u^{-1}) \tilde{h}_\alpha((v - u^{-1})^{-1}) \tilde{w}_\alpha(1)$.

4. Matsumotos Satz

Beweis.

$$\begin{aligned}
& \tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{g}\tilde{w}_\alpha(-1) \\
(\text{Definition } \tilde{g}) \quad &= \tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{x}_\alpha(u)\tilde{w}_\alpha(1)\tilde{x}_\alpha(v)\tilde{w}_\alpha(-1) \\
(\text{Lemma 4.13 h}) \quad &= \tilde{x}_\alpha(-u^{-1})\tilde{w}_\alpha(u^{-1})\tilde{x}_\alpha(-u^{-1})\tilde{x}_\alpha(v)\tilde{w}_\alpha(-1) \\
(\text{Definition } \tilde{h}_\alpha) \quad &= \tilde{x}_\alpha(-u^{-1})\tilde{h}_\alpha(u^{-1})\tilde{w}_\alpha(1)\tilde{x}_\alpha(v-u^{-1})\tilde{w}_\alpha(-1).
\end{aligned}$$

Wendet man nun abermals Lemma 4.13 h) an, so erhält man

$$\tilde{x}_\alpha(-u^{-1})\tilde{h}_\alpha(u^{-1})\tilde{x}_\alpha(-(v-u^{-1})^{-1})\tilde{w}_\alpha((v-u^{-1})^{-1})\tilde{x}_\alpha(-(v-u^{-1})^{-1}).$$

Nach Lemma 4.14 liefert Anwenden von $\tilde{v}$

$$\begin{aligned}
& \tilde{h}_\alpha(u^{-1})\tilde{v}(\tilde{x}_\alpha(-(v-u^{-1})^{-1})\tilde{w}_\alpha((v-u^{-1})^{-1})\tilde{x}_\alpha(-(v-u^{-1})^{-1})) \\
&= \tilde{h}_\alpha(u^{-1})\tilde{h}_\alpha((v-u^{-1})^{-1})\tilde{w}_\alpha(1).
\end{aligned}$$

Nun erhalten wir aus d) und e)

$$\begin{aligned}
& \tilde{h}_\alpha((u-v^{-1})^{-1})\tilde{h}_\alpha(v^{-1})\tilde{w}_\alpha(1) = \tilde{h}_\alpha(u^{-1})\tilde{h}_\alpha((v-u^{-1})^{-1})\tilde{w}_\alpha(1) \\
(\text{Kürzen}) \quad & \Leftrightarrow \tilde{h}_\alpha((u-v^{-1})^{-1})\tilde{h}_\alpha(v^{-1}) = \tilde{h}_\alpha(u^{-1})\tilde{h}_\alpha((v-u^{-1})^{-1}) \\
(\text{Definition } c_\alpha) \quad & \Leftrightarrow c_\alpha((u-v^{-1})^{-1}, v^{-1})\tilde{h}_\alpha((uv-1)^{-1}) = c_\alpha(u^{-1}, (v-u^{-1})^{-1})\tilde{h}_\alpha((uv-1)^{-1}) \\
(\text{Kürzen}) \quad & \Leftrightarrow c_\alpha((u-v^{-1})^{-1}, v^{-1}) = c_\alpha(u^{-1}, (v-u^{-1})^{-1}) \\
(\text{S2}) \quad & \Leftrightarrow c_\alpha(u-v^{-1}, v) = c_\alpha(u, v-u^{-1}) \\
(\text{nach c)}) \quad & \Leftrightarrow c_\alpha((1-uv)^{-1}, u) = c_\alpha((1-uv)^{-1}, u-v^{-1})
\end{aligned}$$

und mit $t := (1-uv)^{-1}$ folgt

$$c_\alpha(t, u) = c_\alpha(t, u(1-t)^{-1}),$$

mit $w := u(1-t)^{-1}$ daraus schließlich

$$c_\alpha(t, (1-t)w) = c_\alpha(t, w).$$

□

Definition 4.17. Sei $c \in S(k^\times, A)$. Dann definieren wir Abbildungen

$$c^\natural, \check{c}, c^2, c^3 : k^\times \times k^\times \rightarrow A$$

$$\begin{aligned}
c^\natural(x, y) &:= c(x, y^2), \\
\check{c}(x, y) &:= c(y, x)^{-1}, \\
c^2(x, y) &:= c(x, y)^2, \\
c^3(x, y) &:= c(x, y)^3.
\end{aligned}$$

Bemerkung 4.18. Unter der Identifikation $c \in S(k^\times, A) \simeq \text{Hom}(K_2^{Sp}(k), A)$ ist $c^\natural = c \circ \natural$, ebenso $\check{c} = \vee \circ c$. Daher können wir auch alles, was wir aus Lemma 2.37 über die Homomorphismen $\vee$ und $\natural$ wissen, hier anwenden.

Lemma 4.19 (Matsumoto, 5.7). *Sei $c \in S(k^\times, A)$. Dann gilt:*

- (a). *Für alle Einheiten $x, y \in k^\times$ ist $c(x, y) = c(x, -xy) = c(-xy, y) = c(y^{-1}, x)$, $c(x^2, y) = c(x, y^2) = c^\natural(x, y)$.*
- (b). *$c^\natural \in S^o(k^\times, A)$ und für $x \in k^\times$ ist $c^\natural(x, -1) = 1$.*
- (c). *$\check{c} \in S(k^\times, A)$ und $c^\natural = (\check{c})^\natural = c\check{c}$.*
- (d). *Wenn c bilinear ist, so ist $c = \check{c}$ und $c^\natural = c^2$.*
- (e). *Die zentrale Erweiterung $\varepsilon = A \rtimes^c k^\times$ von $k^\times$ durch A , die $[c] \in H^2(k^\times; A)$ definiert, ist abelsch genau dann wenn $c^\natural$ trivial ist.*

Beweis.

- (a). In $K_2^{Sp}(k)$ gilt nach Korollar 2.38 $\llbracket x, y \rrbracket = \llbracket x, -xy \rrbracket = \llbracket -xy, y \rrbracket = \llbracket y^{-1}, x \rrbracket$ und $\llbracket x^2, y \rrbracket = \llbracket x, y^2 \rrbracket = \natural(\llbracket x, y \rrbracket)$ für alle $x, y \in k^\times$, mit $S(k^\times, A) \simeq \text{Hom}(K_2^{Sp}(k), A)$ folgen daraus die entsprechenden Relationen für $c \in S(k^\times, A)$.
- (b). Nach (a) ist $c^\natural(x, -1) = c(x, (-1)^2) = c(x, 1) = 1$, denn in $K_2^M(k)$ gilt ja bereits Normiertheit, also $\{x, 1\} = 0$.
- (c). Da nach Lemma 2.37 $\vee$ ein involutiver Homomorphismus mit $\natural(\llbracket x, y \rrbracket) = \llbracket x, y \rrbracket + \vee(\llbracket x, y \rrbracket)$ ist, gilt auch

$$\natural(\vee(\llbracket x, y \rrbracket)) = \vee(\llbracket x, y \rrbracket) + \vee^2(\llbracket x, y \rrbracket) = \vee(\llbracket x, y \rrbracket) + \llbracket x, y \rrbracket = \natural(\llbracket x, y \rrbracket),$$
 und damit für $c \in S(k^\times, A) \simeq \text{Hom}(K_2^{Sp}(k), A)$ bereits nach Lemma 2.34 (e) $c^\natural = c \circ \natural = c \circ \natural \circ \vee = (c \circ \vee) \cdot c \in S^o(k^\times, A)$ und $\check{c} = c \circ \vee \in S(k^\times, A)$.
- (d). In $K_2^M(k)$ gilt nach Korollar 2.39 $\vee(\{x, y\}) = \{x, y\}$ und $\natural(\{x, y\}) = 2\{x, y\}$, also gilt für $c \in S^o(k^\times, A) \simeq \text{Hom}(K_2^M(k), A)$ bereits $\check{c} = c$ und $c^\natural = c^2$.
- (e). Die Erweiterung $\varepsilon = A \rtimes^c k^\times$ ist nach Lemma 2.14 abelsch genau dann, wenn der Kozykel c abelsch ist, also wenn $c(x, y)c(y, x) = 1$. Nach (c) ist $c^\natural(x, y) = c(x, y)c(y, x)^{-1}$ und damit die Behauptung gezeigt.

□

Lemma 4.20 (Matsumoto, 5.8). *Sei c der Steinberg-Kozykel einer Erweiterung E von $\mathbb{G}(k)$ (also $c = c_\beta$ für eine lange Wurzel $\beta \in \Phi$). Dann gelten:*

- (a). *Für jede beliebige Wurzel $\alpha \in \Phi$ ist $c_\alpha \in \{c, \check{c}, c^\natural, c^3\}$.*
- (b). *$\tilde{H} \subset E$ ist abelsch genau dann, wenn c trivial oder Φ symplektisch und $c^\natural$ trivial ist.*

4. Matsumotos Satz

Beweis. Nach Lemma 4.15 (b) ist für α eine lange Wurzel schon $c_{\pm\alpha} = c$, also $c_\alpha \in \{c, \check{c}\}$, denn dann existiert $\sigma \in W$ mit $\sigma\beta = \alpha$ und nach Lemma 4.15 (a) also $c_\beta = c_{\pm\alpha}$, was zusammen mit $c_{-\alpha}(s, t) = c_\alpha(t, s)^{-1}$ genügt. Ist aber α keine lange Wurzel, so muss es so ein σ nicht geben. Allerdings finden wir dann ein γ sodass $\alpha\gamma^* = -1$ und $\gamma\alpha^* \in \{-3, -2\}$, je nachdem ob $\Phi = G_2$ oder nicht. Damit liefert Lemma 4.15 (c) dann $c_\alpha = c_\gamma^3$ oder $c_\alpha = c_\gamma^\sharp$.

Die zweite Aussage folgt ebenso aus Lemma 4.15 (c): Wenn nämlich c trivial ist, so auch $c^\sharp, c^2, c^3$ und da jedes c_α von dieser Form ist, verschwinden die Kommutatoren $[\tilde{h}_\alpha(x), \tilde{h}_\beta(y)] = c_\alpha(x, y^{\alpha\beta^*})$ sämtlich und $\tilde{H}$ ist demnach abelsch. Für Φ symplektisch und $c^\sharp$ trivial ist stets entweder $\alpha\beta^*$ oder $\beta\alpha^*$ gerade, damit verschwindet auch $c_\alpha(x, y^{\alpha\beta^*}) = c_\beta(y, x^{\beta\alpha^*})^{-1}$ und somit alle Kommutatoren in $\tilde{H}$. $\square$

4.3.2. Die zentrale Erweiterung des Torus

Definition 4.21. Sei $c \in S(k^\times, A)$ ein vorgegebener Kozykel. Wir werden daraus einen Kozykel konstruieren, der eine Erweiterung des Torus H definiert. Setze

$$c^\circ := \begin{cases} c & \text{falls } \Delta \text{ symplektisch,} \\ c^\sharp & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist $c^\circ \in S^\circ(k^\times, A)$. Definiere nun für $\alpha, \beta \in \Delta$ mit $\alpha \neq \beta$:

$$\begin{aligned} c_\alpha &:= c \text{ für } \alpha \text{ lange Wurzel,} \\ c_\beta &:= c^\circ \text{ für } \beta \text{ kurze Wurzel, } \Delta \text{ symplektisch,} \\ c_{\alpha\beta} &:= \begin{cases} 1 & \text{falls } \beta\alpha^* = 0, \\ (c^\circ)^{-1} & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit können wir nun noch einen Kozykel $\mathfrak{c} : H \times H \rightarrow A$ konstruieren:

$$\mathfrak{c} \left(\prod_{\alpha \in \Delta} h_\alpha(u_\alpha), \prod_{\beta \in \Delta} h_\beta(v_\beta) \right) := \prod_{\alpha \in \Delta} c_\alpha(u_\alpha, v_\alpha) \prod_{\beta < \alpha} c_{\alpha\beta}(u_\alpha, v_\beta),$$

wobei wir für das Produkt über $\beta < \alpha$ auch $\alpha, \beta \in \Delta$ betrachten und eine beliebige Anordnung auf Δ wählen. Diese Anordnung geht nicht in die Definition ein, da A abelsch ist.

Lemma 4.22. Der Kozykel $\mathfrak{c}$ definiert eine Erweiterung von H durch A , die wir mit $\tilde{H}$ bezeichnen wollen. Die Elemente $h_\alpha(t) \in H$ für $\alpha \in \Delta$, $t \in k^\times$ lassen sich liften zu $\tilde{h}_\alpha(t) \in \tilde{H}$, sodass die folgenden Relationen für alle $\beta, \gamma \in \Delta$ erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_\beta(u) \tilde{h}_\beta(v) &= c_\beta(u, v) \tilde{h}_\beta(uv), \\ [\tilde{h}_\beta(u), \tilde{h}_\gamma(v)] &= c_\beta(u, v^{\beta\gamma^*}) = c_\gamma(u^{\gamma\beta^*}, v). \end{aligned}$$

Beweis. Nach Definition ist $\tilde{H} = A \rtimes^\mathfrak{c} H$, mit der Wahl $\tilde{h}_\alpha(t) := (0, h_\alpha(t)) \in A \times H$ rechnet man die Relationen sofort nach, denn $\mathfrak{c}(h_\beta(u), h_\beta(v)) = c_\beta(u, v)$. $\square$

4.3.3. Eine zyklische Erweiterung von N und Operationen auf $\tilde{H}$

Wir erinnern kurz daran, dass sich in der Gruppe $\mathbb{G}(k)$ der Normalisator N schreiben lässt als semidirektes Produkt des Torus mit der Operation des Normalisators $\mathcal{N} = N_{\mathbb{Z}}$ über den ganzen Zahlen: $N = H \rtimes \mathcal{N}$ (man sieht dies an der Demazure-Tits-Präsentation von $\mathcal{N}$ in Lemma 3.11). Wir bezeichnen mit $\mathcal{H} := H_{\mathbb{Z}}$ die ganzzahligen Punkte des Torus H .

Lemma 4.23 (Matsumoto, 6.3). *Sei $\tilde{\mathcal{N}}$ die von den Elementen w_{α} , $\alpha \in \Delta$ erzeugte Gruppe unter den Relationen (W1, W2), $h_{\alpha} := w_{\alpha}^2$ und $\pi : \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$ die Projektion auf $\mathcal{N} = N_{\mathbb{Z}}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(a). *Die Gruppe $\ker(\pi)$ ist zentral in $\tilde{\mathcal{N}}$ und wird von den $z_{\alpha} := h_{\alpha}^2 = w_{\alpha}^4$ für α lange Wurzel erzeugt. Die Gruppe $\ker(\pi)$ ist zyklisch von unendlicher Ordnung, falls G symplektisch ist, ansonsten zyklisch von Ordnung 2.*

(b). *Die Gruppe $\tilde{\mathcal{N}}$ lässt sich durch die folgenden Relationen (für $\alpha, \beta \in \Delta$) präsentieren:*

$$\begin{aligned} \text{(W1')} \quad & [h_{\alpha}^{-1}, w_{\beta}^{-1}] = w_{\beta}^{1-(-1)^{\beta\alpha^*}}; \\ \text{(W2')} \quad & \begin{cases} w_{\alpha}w_{\beta} = w_{\beta}w_{\alpha} & \text{falls } \beta\alpha^* = 0; \\ w_{\alpha}w_{\beta}w_{\alpha} = w_{\beta}w_{\alpha}w_{\beta} & \text{falls } \beta\alpha^* = \alpha\beta^* = -1; \\ (w_{\alpha}w_{\beta})^2 = (w_{\beta}w_{\alpha})^2 & \text{falls } \beta\alpha^* = -2; \\ (w_{\alpha}w_{\beta})^3 = (w_{\beta}w_{\alpha})^3 & \text{falls } \beta\alpha^* = -3; \end{cases} \end{aligned}$$

(c). *Die Untergruppe $\tilde{\mathcal{H}}$ von $\tilde{\mathcal{N}}$, die von den h_{α} , $\alpha \in \Delta$ erzeugt wird, wird durch die folgende Relation präsentiert:*

$$\text{(H1)} \quad [h_{\alpha}^{-1}, h_{\beta}^{-1}] = h_{\beta}^{1-(-1)^{\beta\alpha^*}}.$$

Beweis. Die Elemente z_{α} erzeugen nach Relation (W1) eine zentrale Untergruppe von $\tilde{\mathcal{N}}$, die nach Lemma 3.11 bereits $\ker(\pi)$ ist. Die Relationen (W1) und (W1') sind äquivalent, denn wegen Zentralität der $z_{\alpha} = h_{\alpha}^2$ ist $h_{\alpha}^2 w_{\beta}^{(-1)^{\beta\alpha^*}} h_{\alpha}^{-2} = w_{\beta}^{(-1)^{\beta\alpha^*}}$ und damit

$$(W1') \Leftrightarrow w_{\beta}^{-1} h_{\alpha} = h_{\alpha} w_{\beta}^{(-1)^{\beta\alpha^*}} \Leftrightarrow h_{\alpha} w_{\beta} h_{\alpha}^{-1} = h_{\alpha}^2 w_{\beta}^{(-1)^{\beta\alpha^*}} h_{\alpha}^{-2} \Leftrightarrow (W1).$$

Die Relationen (W1) bzw. (W1') spezialisieren sich insbesondere zu

$$\begin{cases} h_{\alpha} w_{\beta} = w_{\beta} h_{\alpha} & \text{falls } \beta\alpha^* \text{ gerade,} \\ h_{\alpha} w_{\beta} = w_{\beta}^{-1} h_{\alpha} & \text{falls } \beta\alpha^* \text{ ungerade.} \end{cases}$$

4. Matsumotos Satz

Unter der Relation (W1') sind auch (W2) und (W2') äquivalent:

$$\begin{aligned}
\alpha\beta^* = \beta\alpha^* = 0 : (W2) &= (W2'); \\
\alpha\beta^* = \beta\alpha^* = -1 : (W2) &\Leftrightarrow w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} h_\alpha = w_\beta w_\alpha^{-1} w_\beta^{-1} h_\alpha \\
&\Leftrightarrow w_\alpha w_\beta w_\alpha = w_\beta w_\alpha^{-1} h_\alpha w_\beta \\
&\Leftrightarrow (W2'); \\
\beta\alpha^* = -2 : (W2) &\Leftrightarrow w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} h_\alpha = w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} w_\beta h_\alpha \\
&\Leftrightarrow w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha = w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} h_\alpha w_\beta \\
&\Leftrightarrow (W2'); \\
\beta\alpha^* = -3 : (W2) &\Leftrightarrow w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} w_\beta^{-1} w_\alpha^3 = w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} w_\beta^{-1} w_\alpha w_\beta^{-1} w_\alpha^{-1} w_\alpha^3 \\
&\Leftrightarrow w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} h_\alpha w_\beta w_\alpha = w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} w_\beta^{-1} w_\alpha w_\beta^{-1} h_\alpha \\
&\Leftrightarrow w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha = w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} h_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta \\
&\Leftrightarrow (W2').
\end{aligned}$$

Zweimaliges anwenden von (W1') liefert

$$w_\beta^{-2} h_\alpha w_\beta^2 = w_\beta^{-1} h_\alpha w_\beta w_\beta^{1-(-1)^{\beta\alpha^*}} = h_\alpha h_\beta^{2(1-(-1)^{\beta\alpha^*})},$$

damit ist Aussage (c) bewiesen.

An Relation (W3) sieht man, dass die z_α die Gruppe $\ker(\pi)$ erzeugen. Nun ist aber sogar $\ker(\pi)$ von z_α für eine lange Wurzel α erzeugt, denn aus $[h_\alpha, h_\beta] = h_\beta^{(-1)^{\beta\alpha^*} - 1} = h_\alpha^{1-(-1)^{\alpha\beta^*}}$ folgt, dass bei Existenz eines $\beta \in \Delta$ mit $\beta\alpha^*$ ungerade schon $z_\beta^2 = e$, für $\alpha\beta^* = -2$ sogar $z_\beta = e$ und für $\alpha\beta^*$ und $\beta\alpha^*$ beide ungerade $z_\beta = z_\alpha$ gilt. Wenn Δ nicht symplektisch ist, ist also $z_\alpha = e$ oder $z_\alpha^2 = e$, in jedem Fall aber erzeugt z_α bereits $\ker(\pi)$.

Also: $\ker(\pi)$ ist zyklisch und im nicht-symplektischen Fall von Ordnung ≤ 2 .

Behauptung: Für Δ symplektisch ist $\ker(\pi)$ von unendlicher Ordnung.

Die Relationen (W1'), (W2') liefern eine Präsentation der Abelianisierung von $\tilde{\mathcal{N}}$, man sieht daran, dass für $\alpha \in \Delta$ die lange Wurzel das Element $\overline{w_\alpha} \in \tilde{\mathcal{N}}^{ab}$ unendliche Ordnung hat (denn es gibt keine Relationen in der Abelianisierung, die die Ordnung eines Elements beschränken), also auch schon das Element $w_\alpha \in \tilde{\mathcal{N}}$.

Behauptung: Für Δ nicht symplektisch ist $\ker(\pi)$ von Ordnung 2.

Die Strategie dieses abschließenden Beweisteils ist, eine Erweiterung Λ von $\mathcal{N}$ mit Kern von Ordnung 2 zu definieren, sodass Λ die gleichen Relationen wie $\tilde{\mathcal{N}}$ erfüllt, also isomorph ist. Dazu genügt es, Wurzelsysteme mit Wurzeln gleicher Länge zu betrachten, da der allgemeine Fall dann mit Lemma 3.38 folgt. Wir definieren zuerst eine Erweiterung $\tilde{\mathcal{H}}'$ von $\mathcal{H}$ und dann Λ als Normalteiler in $\text{Aut}(\tilde{\mathcal{H}}' \times W)$. Die größte Arbeit steckt im Nachrechnen der Relationen (W1') und (W2') für dieses Λ .

Sei also $\tilde{\mathcal{H}}'$ erzeugt von Elementen t_α für $\alpha \in \Delta$ unter den Relationen

$$(H1') \quad \forall \alpha, \beta \in \Delta : t_\alpha^4 = e, \quad t_\beta^{-1} t_\alpha t_\beta = t_\alpha t_\beta^{1-(-1)^{\beta\alpha^*}}.$$

Damit ist $\tilde{\mathcal{H}}' \xrightarrow{t_\alpha \mapsto h_\alpha} \mathcal{H}$ eine zentrale Erweiterung mit Kern von Ordnung 2. Nun definieren wir Automorphismen $\theta_\alpha \in \text{Aut}(\tilde{\mathcal{H}}')$ für jedes $\alpha \in \Delta$ als Fortsetzung von

$$t_\beta \mapsto t_\beta t_\alpha^{((-1)^{\alpha\beta^*} - 1)/2}.$$

Diese θ_α erfüllen $\theta_\alpha^2 = \text{Ad}(t_\alpha)$, denn (mit der Notation $\text{Ad}(x)(y) := xyx^{-1}$)

$$\begin{aligned} \theta_\alpha^{-1}(t_\beta) &= t_\beta t_\alpha^{(1 - (-1)^{\alpha\beta^*})/2} \implies \theta_\alpha^\pm(t_\alpha) = t_\alpha t_\alpha^0 = t_\alpha \\ &\implies \theta_\alpha^{-1}(\theta_\alpha^{-1}(t_\beta)) = t_\beta t_\alpha^{1 - (-1)^{\alpha\beta^*}} = t_\alpha^{-1} t_\beta t_\alpha \end{aligned}$$

nach $(H1')$. Damit ist also $\theta_\alpha^{-2} = \text{Ad}(t_\alpha^{-1})$ und somit $\theta_\alpha^2 = \text{Ad}(t_\alpha)$.

Die Relationen (W1) und (W2) für die Automorphismen θ_α (anstelle w_α) lassen sich mit einigem Aufwand ohne Schwierigkeit nachrechnen.

Nun definieren wir für jedes $\alpha \in \Delta$ einen Automorphismus

$$\lambda_\alpha : \tilde{\mathcal{H}}' \times W \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}' \times W, (t, \sigma) \mapsto \begin{cases} (\theta_\alpha(t), \sigma_\alpha \sigma) & \text{falls } l(\sigma_\alpha \sigma) > l(\sigma), \\ (\theta_\alpha(t t_\alpha), \sigma_\alpha \sigma) & \text{falls } l(\sigma_\alpha \sigma) < l(\sigma). \end{cases}$$

Wir bezeichnen die von den λ_α , $\alpha \in \Delta$ erzeugte Automorphismengruppe von $\tilde{\mathcal{H}}' \times W$ mit Λ .

Es ist $\lambda_\alpha^2(t, \sigma) = (t_\alpha t, \sigma)$, denn $\sigma_\alpha \sigma_\alpha \sigma = \sigma$ und $\theta_\alpha(t_\alpha t) = t_\alpha \theta_\alpha(t)$. Ähnlich rechnet man nach, dass $\lambda_\alpha^2 \lambda_\beta \lambda_\alpha^{-2} = \lambda_\beta^{(-1)^{\beta\alpha^*}}$, also erfüllen die λ_α die Relationen (W1') und bilden einen Normalteiler in $\text{Aut}(\tilde{\mathcal{H}}' \times W)$. Dieser ist zu $\tilde{\mathcal{H}}'$ isomorph. Wenn nun auch noch die Relationen (W2') erfüllt sind, ist Λ isomorph zu $\tilde{\mathcal{N}}$ und wir sind fertig.

Sei für $\Delta' := \{\alpha, \beta\} \subset \Delta$ nun $W' \subset W$ die von den $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ erzeugte Untergruppe. Nach Definition von $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$ erfüllen diese (W2') genau dann, wenn sie (W2') auf $\{e\} \times W' \subset \tilde{\mathcal{H}}' \times W$ erfüllen. Dabei sind nur noch die Fälle $\Delta' = A_1 \times A_1$ und $\Delta' = A_2$ zu untersuchen.

Im Fall $\Delta' = A_1 \times A_1$ treten nur die Situation $\beta\alpha^* = 0 = \alpha\beta^*$ (für $\beta \neq \pm\alpha$) und die Situation $\beta\alpha^* = -2 = \alpha\beta^*$ (für $\beta = -\alpha$) auf. Man rechnet dann direkt nach, dass $\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_\beta \lambda_\alpha$ bzw. $(\lambda_\alpha \lambda_{-\alpha})^2 = (\lambda_{-\alpha} \lambda_\alpha)^2$.

Im Fall $\Delta' = A_2$ tritt nur die Situation $\beta\alpha^* = -3$ (für $-\beta \neq \alpha$ einfache Wurzel) auf. Es ist dann $\alpha\beta^* = -1$ und man rechnet direkt nach, dass $(\lambda_\alpha \lambda_\beta)^3 = (\lambda_\beta \lambda_\alpha)^3$ ist. $\square$

Lemma 4.24 (Matsumoto, 6.5).

(a). Für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Delta$ gibt es $\theta_\alpha \in \text{Aut}(\tilde{\mathcal{H}})$ sodass

$$\theta_\alpha|_A = \text{id}_A \text{ und } \forall \beta \in \Delta : \theta_\alpha(\tilde{h}_\beta(t)) = \tilde{h}_\beta(t) \tilde{h}_\alpha(t^{\alpha\beta^*}).$$

(b). Der Automorphismus θ_α induziert via $\varphi : \tilde{\mathcal{H}} \twoheadrightarrow H$ auf H den durch $w_\alpha(-1) \in N$ definierten Automorphismus $\text{Ad}(w_\alpha(-1)) = \text{Ad}(w_\alpha(1)^{-1}) = \text{Ad}(w_\alpha(1))^{-1}$.

(c). Die θ_α und die θ_α^{-1} erfüllen die Relationen (W1), (W2) und (W3).

(d). Für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Delta$ ist $\theta_\alpha^2 = \theta_\alpha^{-2} = \text{Ad}(\tilde{h}_\alpha(-1))$.

4. Matsumotos Satz

Beweis. Man definiert Abbildungen θ_α durch $\theta_\alpha(\tilde{h}_\beta(t)) := \tilde{h}_\beta(t)\tilde{h}_\alpha(t^{\alpha\beta^*})$ und rechnen nach, dass dies zu einem Gruppenhomomorphismus fortsetzt, sogar zu einem Automorphismus. Die inversen Automorphismen θ_α^{-1} operieren dann durch $\theta_\alpha^{-1}(\tilde{h}_\beta(t)) = \tilde{h}_\beta(t)\tilde{h}_\alpha(t^{-\alpha\beta^*})$.

Wir stellen noch fest, dass $c_\alpha(u, v^{\alpha\beta^*})$ bilinear in u, v ist, für alle $\alpha, \beta \in \Delta$.

Behauptung: Die $\theta_\alpha^{-1}(\tilde{h}_\beta(t))$ erfüllen die gleichen Relationen wie die $\tilde{h}_\beta(t)$.

$$\begin{aligned} & \theta_\alpha^{-1}(\tilde{h}_\beta(u))\theta_\alpha^{-1}(\tilde{h}_\beta(v)) \\ &= \tilde{h}_\beta(u)\tilde{h}_\alpha(u^{-\alpha\beta^*})\tilde{h}_\beta(v)\tilde{h}_\alpha(v^{-\alpha\beta^*}) \\ &= \tilde{h}_\beta(u)\tilde{h}_\beta(v)\tilde{h}_\alpha((uv)^{-\alpha\beta^*})c_\alpha(u^{-\alpha\beta^*}, v^{\alpha\beta^*})c_\alpha(u^{-\alpha\beta^*}, v^{-\alpha\beta^*}) \\ &= c_\beta(u, v)\tilde{h}_\beta(uv)\tilde{h}_\alpha((uv)^{-\alpha\beta^*}) \\ &= c_\beta(u, v)\theta_\alpha^{-1}(\tilde{h}_\beta(uv)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\theta_\alpha^{-1}(\tilde{h}_\beta(u)), \theta_\alpha^{-1}(\tilde{h}_\gamma(v))] \\ &= c_\alpha(u, v^{\beta\gamma^*})c_\alpha(u^{-\alpha\beta^*}, v^{\alpha\gamma^*})c_\alpha(u^{\alpha\beta^*}, v^{-\alpha\gamma^*})c_\alpha(u^{-\alpha\beta^*}, v^{-\alpha\gamma^*})^2 \\ &= c_\alpha(u, v^{\beta\gamma^*}). \end{aligned}$$

Damit ist klar, dass θ_α ein Automorphismus ist und dass θ_α auf A die Identität ist.

Um (b) zu zeigen, betrachten wir $\varphi(\theta_\alpha^{-1}(\tilde{h}_\beta(t))) = h_\beta(t)h_\alpha(t^{-\alpha\beta^*})$, welches mit Lemma 4.13, (f) gleich $w_\alpha(1)h_\beta(t)w_\alpha(1)^{-1}$ ist.

Für (c) betrachten wir zunächst (mit $c(x, y) = c(x, -xy)$)

$$\begin{aligned} \theta_\alpha^{-1}(\tilde{h}_\alpha(t)) &= \tilde{h}_\alpha(t)\tilde{h}_\alpha(t^{-2}) = c_\alpha(t, t^{-2})\tilde{h}_\alpha(t^{-1}) = \tilde{h}_\alpha(t^{-1}), \\ \theta_\alpha^{-2}(\tilde{h}_\beta(u)) &= \tilde{h}_\beta(u)\tilde{h}_\alpha(u^{-\alpha\beta^*})\tilde{h}_\alpha(u^{\alpha\beta^*}) \\ &= \tilde{h}_\beta(u)c_\alpha(u^{-\alpha\beta^*}, u^{\alpha\beta^*}) = \tilde{h}_\beta(u)c_\alpha(u^{-\alpha\beta^*}, -1) \\ &= \tilde{h}_\beta(u)c_\alpha(-1, u^{\alpha\beta^*}) = c_\alpha(-1, u^{\alpha\beta^*})\tilde{h}_\beta(u) \\ &= \tilde{h}_\alpha(-1)\tilde{h}_\beta(u)\tilde{h}_\alpha(-1)^{-1}\tilde{h}_\beta(u)^{-1}\tilde{h}_\beta(u) = \tilde{h}_\alpha(-1)\tilde{h}_\beta(u)\tilde{h}_\alpha(-1)^{-1}. \end{aligned}$$

Also ist $\theta_\alpha^{-2} = \theta_\alpha^2 = \text{Ad}(\tilde{h}_\alpha(-1))$ und somit gilt

$$\begin{aligned} & \text{Ad}(\tilde{h}_\alpha(-1))(\theta_\beta(\text{Ad}(\tilde{h}_\alpha(-1))(\tilde{h}_\gamma(u)))) = \theta_\beta^{(-1)^{\beta\alpha^*}}(\tilde{h}_\gamma(u)) \\ \text{(W1)} \quad & \implies \theta_\alpha^2 \circ \theta_\beta \circ \theta_\alpha^2 = \theta_\beta^{(-1)^{\beta\alpha^*}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Ad}(\tilde{h}_\alpha(-1))(\text{Ad}(\tilde{h}_\alpha(-1))(\tilde{h}_\beta(u))) = \tilde{h}_\beta(u) \\ \text{(W3)} \quad & \implies \theta_\alpha^4 = \text{id}. \end{aligned}$$

Für (W2) muss man noch etwas arbeiten, wir zeigen äquivalent (W2'). Der Fall $\beta\alpha^* = -3$ tritt in den von uns betrachteten Wurzelsystemen nicht auf, wenn wir die Einbettungen aus Lemma 3.38 verwenden und die Aussage für Wurzelsysteme vom

Typ G_2, F_4 und B_n folgern aus der hier bewiesenen für $A_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8$. Für $\beta\alpha^* = 0$ ist

$$\theta_\alpha^{-1} \left(\theta_\beta^{-1}(\tilde{h}_\gamma(u)) \right) = \tilde{h}_\gamma(u) \tilde{h}_\alpha(u^{-\alpha\gamma^*}) \tilde{h}_\beta(u^{-\beta\gamma^*})$$

und damit (W2') erfüllt. Für $\beta\alpha^* = \alpha\beta^* = -1$ ist

$$\begin{aligned} (\theta_\alpha \theta_\beta \theta_\alpha)^{-1}(\tilde{h}_\gamma(t)) &= (\theta_\beta \theta_\alpha)^{-1}(\tilde{h}_\gamma(t) \tilde{h}_\alpha(t^{-\alpha\gamma^*})) \\ &= \theta_\alpha^{-1}(\tilde{h}_\gamma(t) \tilde{h}_\beta(t^{-\beta\gamma^*}) \tilde{h}_\alpha(t^{-\alpha\gamma^*}) \tilde{h}_\beta(t^{-\alpha\gamma^*})) \\ &= \tilde{h}_\gamma(t) \tilde{h}_\alpha(t^{-\alpha\gamma^*}) \tilde{h}_\beta(t^{-\beta\gamma^*}) \tilde{h}_\alpha(t^{-\beta\gamma^*}) \tilde{h}_\alpha(t^{\alpha\gamma^*}) \tilde{h}_\beta(t^{-\alpha\gamma^*}) \tilde{h}_\alpha(t^{-\gamma\alpha^*}) \\ &= \tilde{h}_\gamma(t) \tilde{h}_\alpha(t^{-\alpha\gamma^* - \beta\gamma^*}) \tilde{h}_\beta(t^{-\alpha\gamma^* - \beta\gamma^*}) c_\beta(-1, t^{\beta\gamma^*}) \\ &= \tilde{h}_\gamma(t) \tilde{h}_\beta(t^{-\alpha\gamma^* - \beta\gamma^*}) \tilde{h}_\alpha(t^{-\alpha\gamma^* - \beta\gamma^*}) c_\alpha(-1, t^{\alpha\gamma^*}) \\ &= (\theta_\beta \theta_\alpha \theta_\beta)^{-1}(\tilde{h}_\gamma(t)). \end{aligned}$$

Für $\beta\alpha^* = -2$ müssen wir $(\theta_\alpha \theta_\beta)^2(\tilde{h}_\gamma(t)) = (\theta_\beta \theta_\alpha)^2(\tilde{h}_\gamma(t))$ zeigen. Dazu betrachten wir für $t \in k^\times$ die Menge $\{\tilde{h}_\alpha(t^i) \tilde{h}_\beta(t^{2j}) \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$ und stellen fest, dass sie in $\tilde{H}$ eine Untergruppe bilden, die wir mit $\tilde{H}'(t)$ bezeichnen. Diese Gruppe $\tilde{H}'(t)$ ist abelsch, denn nach Lemma 2.40 ist $c_\gamma(\pm t^{2i}, t^{2j}) = 1$ für alle $i, j \in \mathbb{Z}$ und alle $\gamma \in \Delta$ und somit für alle $i, j, k, l \in \mathbb{Z}$

$$\tilde{h}_\alpha(t^i) \tilde{h}_\beta(t^{2j}) \tilde{h}_\alpha(t^k) \tilde{h}_\beta(t^{2l}) = \tilde{h}_\alpha(t^{k+i}) \tilde{h}_\beta(t^{2(j+l)}).$$

Es lassen θ_α und θ_β die Mengen $\tilde{H}'(t)$ und $\tilde{h}_\gamma(t) \tilde{H}'(t)$ invariant, also

$$(\theta_\alpha \theta_\beta)^2(\tilde{h}_\gamma(t)) = \tilde{h}_\gamma(t) \tilde{h}'_1 \text{ und } (\theta_\beta \theta_\alpha)^2(\tilde{h}_\gamma(t)) = \tilde{h}_\gamma(t) \tilde{h}'_2$$

mit Elementen $\tilde{h}'_1, \tilde{h}'_2 \in \tilde{H}'(t)$. Da $\varphi \circ \theta_\alpha = \text{Ad}(w_\alpha(-1)) \circ \varphi$ (nach Aussagenteil (b)), ist $\varphi(\tilde{h}'_1) = \varphi(\tilde{h}'_2)$. Nun ist allerdings die Einschränkung von φ auf $\tilde{H}'(t)$ injektiv, da φ genau die Kommutatoren der $\tilde{h}_\alpha(t)$ auf 0 abbildet und $\tilde{H}'(t)$ abelsch ist. Also ist bereits $\tilde{h}'_1 = \tilde{h}'_2$ und somit $(\theta_\alpha \theta_\beta)^2 = (\theta_\beta \theta_\alpha)^2$, also ist auch (W2') vollständig gezeigt und damit auch Aussagenteil (d). $\square$

4.3.4. Die zentrale Erweiterung des Normalisators

Definition 4.25. Sei $\tilde{\mathcal{N}}$ erzeugt von $\tilde{w}_\alpha$ für $\alpha \in \Delta$ unter den Relationen (W1) und (W2) und $\tilde{\mathcal{H}} \subset \tilde{\mathcal{N}}$ die von den $\tilde{h}_\alpha := (\tilde{w}_\alpha)^2$ erzeugte Untergruppe. Sei weiter $\tilde{H}$ die in Abschnitt 4.3.2 konstruierte Erweiterung von H . Wir lassen $\tilde{\mathcal{N}}$ auf $\tilde{H}$ operieren via $\tilde{w}_\alpha \cdot (\tilde{h}_\beta(t)) := \theta_\alpha(\tilde{h}_\beta(t))$ für $\alpha \in \Delta$ (das geht nach Lemma 4.24 (d)), und bilden das semidirekte Produkt $N^* := \tilde{H} \rtimes \tilde{\mathcal{N}}$. Wir nennen die kanonische Projektion $p^* : N^* \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$.

Lemma 4.26 (Matsumoto, 6.6).

- (a). Es gibt $j : \tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \tilde{H}$ sodass für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Delta$ gilt: $j(\tilde{h}_\alpha) = \tilde{h}_\alpha(-1)$. Die Elemente $\tilde{h}j(\tilde{h})^{-1}$ für $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}$ bilden einen Normalteiler $J \trianglelefteq N^*$.

4. Matsumotos Satz

(b). Sei $\tilde{N} := N^*/J$. Dann ist $\tilde{H}$ isomorph zu einem Normalteiler von $\tilde{N}$ und $\tilde{N}$ ist eine zentrale Erweiterung von N durch A :

$$A \rightarrow \tilde{N} \xrightarrow{\varphi} N$$

mit $\varphi(\tilde{h}_\alpha(t)) := h_\alpha(t)$ und $\varphi(p^*(\tilde{w}_\alpha)) := w_\alpha(-1)$ für $\alpha \in \Delta$. Setze

$$\forall \alpha \in \Delta, \forall t \in k^\times : \tilde{w}_\alpha(t) := \tilde{h}_\alpha(t)p^*(\tilde{w}_\alpha)^{-1},$$

dann ist $p^*(\tilde{w}_\alpha) = \tilde{w}_\alpha(-1)$ und $\tilde{w}_\alpha(t)^{-1} = \tilde{w}_\alpha(-t)$.

Beweis. Der Homomorphismus j lässt sich zunächst auf den Erzeugern $\tilde{h}_\alpha \in \tilde{\mathcal{H}}$ für $\alpha \in \Delta$ definieren als $j(\tilde{h}_\alpha) := \tilde{h}_\alpha(-1)$, damit er auf $\tilde{\mathcal{H}}$ auch definiert ist, muss er die Relationen (H1) erfüllen, also $[\tilde{h}_\alpha^{-1}, \tilde{h}_\beta^{-1}]$ auf das selbe Bild wie $\tilde{h}_\beta^{1-(-1)^{\beta\alpha^*}}$ abbilden. Es ist

$$\tilde{h}_\beta^{1-(-1)^{\beta\alpha^*}} = \begin{cases} \text{Id}, & \text{für } \beta\alpha^* \text{ gerade,} \\ \tilde{h}_\beta^2, & \text{sonst,} \end{cases}$$

andererseits ist nach Lemma 4.22

$$[\tilde{h}_\alpha(-1)^{-1}, \tilde{h}_\beta(-1)^{-1}] = c_\beta((-1)^{\beta\alpha^*}, -1) = h_\beta((-1)^{\beta\alpha^*})h_\beta(-1),$$

was für $\beta\alpha^*$ gerade genau Id ist, ansonsten $h_\beta(-1)^2$. $\square$

4.3.5. Die zentrale Erweiterung der Gruppe $\mathbb{G}(k)$

Jetzt definieren wir eine zentrale Erweiterung $E \rightarrow \mathbb{G}(k)$, die die zentrale Erweiterung $A \rightarrow \tilde{N} \rightarrow N$ zum Kozykel $c \in S(k^\times, A)$ fortsetzt. Dazu wird die Bruhat-Zerlegung von $\mathbb{G}(k)$ verwendet.

Definition 4.27. Sei $\nu : \mathbb{G}(k) \rightarrow N$ die Projektion auf den Normalisator, die von der Bruhat-Zerlegung aus Lemma 3.14 her kommt. Wir betrachten den Pullback $S := \mathbb{G}(k) \times_N \tilde{N} \subset \mathbb{G}(k) \times \tilde{N}$, also haben wir ein kommutierendes Diagramm von Mengen (nicht von Gruppen!)

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\nu} & \tilde{N} \\ p \downarrow & \lrcorner & \downarrow \varphi \\ \mathbb{G}(k) & \xrightarrow{\nu} & N \end{array}$$

Nun definieren wir Transformationen $S \rightarrow S$:

$$\begin{aligned} \forall \tilde{h} \in \tilde{H} : \lambda(\tilde{h})(g, \tilde{n}) &:= (\varphi(\tilde{h})g, \tilde{h}\tilde{n}), \\ \forall u \in U^+ : \lambda(u)(g, \tilde{n}) &:= (ug, \tilde{n}), \\ \forall \alpha \in \Delta : \lambda_\alpha(g, \tilde{n}) &:= (w_\alpha(-1)g, X\tilde{n}). \end{aligned}$$

wobei eigentlich $X = \tilde{\nu}(\tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{g})\tilde{\nu}(\tilde{g})^{-1}$ sein soll, da es $\tilde{g}$ hier nicht gibt, wir jedoch definieren müssen

$$X := \begin{cases} \tilde{w}_\alpha(-1) & \text{falls } \nu(w_\alpha(-1)g) = w_\alpha(-1)\nu(g), \\ \tilde{h}_\alpha(t^{-1}) & \text{falls } \nu(w_\alpha(-1)g) = h_\alpha(t^{-1})\nu(g). \end{cases}$$

Die von $\{\lambda_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ erzeugte Gruppe von Automorphismen von S nennen wir Λ . Schließlich nennen wir die von $\lambda(\tilde{H}) \cup \lambda(U^+) \cup \Lambda$ erzeugte Gruppe E .

Proposition 4.28. *Nach Konstruktion haben wir Isomorphismen*

$$\lambda : \tilde{H} \xrightarrow{\sim} \lambda(\tilde{H}) \text{ und } \lambda : U^+ \xrightarrow{\sim} \lambda(U^+).$$

Die Untergruppe $A \subset \tilde{H}$ ist als $\lambda(A) \subset E$ zentral in E , denn sie operiert (via λ) nur auf dem $\tilde{N}$ -Faktor von S , und in $\tilde{N}$ ist A zentral. Somit operiert E auf dem Bahnenraum von $\lambda(A)$, wobei der Bahnenraum via p zu $\mathbb{G}(k)$ isomorph ist, da jeder Repräsentant einer Bahn die gleiche $\mathbb{G}(k)$ -Komponente hat (wiederum, da $\lambda(A)$ nur auf dem $\tilde{N}$ -Faktor von S operiert). Insgesamt operiert also E auf $\mathbb{G}(k)$ via Linkstranslationen, was kanonisch eine Abbildung $\pi : E \rightarrow \mathbb{G}(k)$ liefert (auf der Identität operieren lassen).

Es fehlt noch ein Bestandteil, um eine zentrale Erweiterung $A \hookrightarrow E \rightarrow \mathbb{G}(k)$ zu erhalten: Wir müssen zeigen, dass der Kern von $\pi : E \rightarrow \mathbb{G}(k)$ genau $\lambda(A)$ (also auch isomorph zu A) ist. Dann wollen wir außerdem noch sehen, dass der Steinberg-Kozykel von E mit dem vorgegebenen übereinstimmt. Wir werden diese letzten Behauptungen beweisen, indem wir die Frage auf den Rang ≤ 2 Fall zurückführen.

4.3.6. Reduktion auf den Fall G von Rang 1 oder 2

Lemma 4.29 (Matsumoto, 6.7).

(a). Für $\tilde{h} \in \tilde{H}$ und $u \in U$ ist $\lambda(\tilde{h})\lambda(u)\lambda(\tilde{h})^{-1} = \lambda(\varphi(\tilde{h})u\varphi(\tilde{h})^{-1})$.

(b). Setze für alle $\alpha \in \Delta$: $U_\alpha^+ := U^+ \cap w_\alpha(1)U^+w_\alpha(1)^{-1}$, dann ist

$$U_\alpha^+ = w_\alpha(1)U_\alpha^+w_\alpha(1)^{-1} \quad \text{und} \quad \forall u \in U_\alpha^+ : \lambda_\alpha^{-1}\lambda(u)\lambda_\alpha = \lambda(w_\alpha(1)uw_\alpha(1)^{-1}).$$

(c). Für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Delta$ ist $\lambda_\alpha^2 = \lambda(\tilde{h}_\alpha(-1))$.

(d). Für jedes $\alpha \in \Delta$ und $\tilde{h} \in \tilde{H}$ ist $\lambda_\alpha^{-1}\lambda(\tilde{h})\lambda_\alpha = \lambda(\tilde{w}_\alpha(1)\tilde{h}\tilde{w}_\alpha(1)^{-1})$.

Beweis. Sei $(g, \tilde{n}) \in S$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} & \lambda(\tilde{h}_\alpha(t))\lambda(u)\lambda(\tilde{h}_\alpha(t))^{-1}(g, \tilde{n}) \\ &= \lambda(\tilde{h}_\alpha(t))\lambda(u)(h_\alpha(t)^{-1}g, \tilde{h}_\alpha(t)^{-1}\tilde{n}) \\ &= \lambda(\tilde{h}_\alpha(t))(uh_\alpha(t)^{-1}g, \tilde{h}_\alpha(t)^{-1}\tilde{n}) \\ &= (h_\alpha(t)uh_\alpha(t)^{-1}g, \tilde{n}) \\ &= \lambda(h_\alpha(t)uh_\alpha(t)^{-1})(g, \tilde{n}) \end{aligned}$$

4. Matsumotos Satz

und somit (a) gezeigt. Für (b) rechnet man nach, wenn $\nu(w_\alpha(-1)g) = w_\alpha(-1)\nu(g)$:

$$\begin{aligned}
& (\lambda_\alpha^{-1}\lambda(u)\lambda_\alpha)(g, \tilde{n}) \\
&= (\lambda_\alpha^{-1}\lambda(u))(w_\alpha(-1)g, \tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{n}) \\
&= \lambda_\alpha^{-1}(uw_\alpha(-1)g, \tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{n}) \\
&= (w_\alpha(-1)^{-1}uw_\alpha(-1)g, \tilde{n}) \\
&= \lambda(w_\alpha(-1)^{-1}uw_\alpha(-1))(g, \tilde{n}) \\
&= \lambda(w_\alpha(1)uw_\alpha(1)^{-1})(g, \tilde{n})
\end{aligned}$$

und für $\nu(w_\alpha(-1)g) = h_\alpha(t^{-1})\nu(g)$ analog:

$$\begin{aligned}
& (\lambda_\alpha^{-1}\lambda(u)\lambda_\alpha)(g, \tilde{n}) \\
&= (\lambda_\alpha^{-1}\lambda(u))(w_\alpha(-1)g, \tilde{h}_\alpha(t^{-1})\tilde{n}) \\
&= \lambda_\alpha^{-1}(uw_\alpha(-1)g, \tilde{h}_\alpha(t^{-1})\tilde{n}) \\
&= (w_\alpha(-1)^{-1}uw_\alpha(-1)g, \tilde{n}) \\
&= \lambda(w_\alpha(1)uw_\alpha(1)^{-1})(g, \tilde{n}).
\end{aligned}$$

Für (c) zeigen wir

$$\lambda_\alpha^2(g, \tilde{n}) = (h_\alpha(-1)g, \tilde{h}_\alpha(-1)\tilde{n}) = \lambda(\tilde{h}_\alpha(-1))(g, \tilde{n}),$$

indem wir $\nu(w_\alpha(-1)^2g)$ in den zwei nach Lemma 3.14 (d) möglichen Fällen berechnen:

Fall 1: $\nu(w_\alpha(-1)g) = w_\alpha(-1)\nu(g)$, damit $\nu(w_\alpha(-1)^2g) = w_\alpha(-1)\nu(w_\alpha(-1)g)$ und somit

$$\lambda_\alpha^2(g, \tilde{n}) = \lambda_\alpha(w_\alpha(-1)g, \tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{n}) = (h_\alpha(-1)g, \tilde{w}_\alpha(-1)^2\tilde{n}).$$

Fall 2: $\nu(w_\alpha(-1)g) = h_\alpha(t^{-1})\nu(g)$, damit $\nu(w_\alpha(-1)^2g) = h_\alpha(-t)\nu(w_\alpha(-1)g)$ und somit

$$\lambda_\alpha^2(g, \tilde{n}) = \lambda_\alpha(w_\alpha(-1)g, \tilde{h}_\alpha(t^{-1})\tilde{n}) = (h_\alpha(-1)g, \tilde{h}_\alpha(-t)\tilde{h}_\alpha(t^{-1})\tilde{n}).$$

Dabei bemerken wir noch $\tilde{h}_\alpha(-t)\tilde{h}_\alpha(t^{-1}) = \tilde{h}_\alpha(-1)c_\alpha(-t, t^{-1}) = \tilde{h}_\alpha(-1)$.

In beiden Fällen gelangen wir also zum behaupteten Ergebnis und damit zu (c). Damit können wir nun λ_α^{-1} berechnen, denn $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha^{-1}\lambda_\alpha^2$, und somit gibt es zwei Fälle:

Fall 1: $\nu(w_\alpha(-1)g) = w_\alpha(-1)\nu(g)$, dann ist $\lambda_\alpha^{-1}(g, \tilde{n}) = (w_\alpha(1)g, \tilde{w}_\alpha(1)\tilde{n})$.

Fall 2: $\nu(w_\alpha(-1)g) = h_\alpha(t^{-1})\nu(g)$, dann ist $\lambda_\alpha^{-1}(g, \tilde{n}) = (w_\alpha(1)g, \tilde{h}_\alpha(-t)^{-1}\tilde{n})$.

Für (d) genügt es, die Aussage für $\tilde{h} = \tilde{h}_\beta(s)$ mit $\beta \in \Delta$ und $s \in k^\times$ zu zeigen. Wiederum unterscheiden wir die zwei Fälle:

Fall 1: $\nu(w_\alpha(-1)g) = w_\alpha(-1)\nu(g)$, dann ist

$$\lambda_\alpha^{-1}\lambda(\tilde{h}_\beta(s))\lambda_\alpha(g, \tilde{n}) = (w_\alpha(1)h_\beta(s)w_\alpha(-1)g, \tilde{w}_\alpha(1)\tilde{h}_\beta(s)\tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{n}).$$

Fall 2: $\nu(w_\alpha(-1)g) = h_\alpha(t^{-1})\nu(g)$, dann ist

$$\begin{aligned}\nu(w_\alpha(1)h_\beta(s)w_\alpha(-1)g) &= h_\alpha(t^{-1}s^{\alpha\beta*})^{-1}\nu(h_\beta(s)w_\alpha(-1)g) \\ &= h_\alpha(t^{-1}s^{\alpha\beta*})h_\beta(s)h_\alpha(t^{-1})\nu(g),\end{aligned}$$

also

$$\lambda_\alpha^{-1}\lambda(\tilde{h}_\beta(s))\lambda_\alpha(g, \tilde{n}) = (w_\alpha(1)h_\beta(s)w_\alpha(-1)g, \tilde{h}_\alpha(t^{-1}s^{\alpha\beta*})^{-1}\tilde{h}_\beta(s)\tilde{h}_\alpha(t^{-1})\tilde{n}).$$

In $\tilde{H}$ gilt nach Lemma 4.13 (e)

$$\tilde{h}_\beta(s^{-1})\tilde{h}_\alpha(t^{-1}s^{\alpha\beta*})\tilde{h}_\beta(s^{-1})^{-1} = \tilde{h}_\alpha(s^{\alpha\beta*}t^{-1}s^{-\alpha\beta*})\tilde{h}_\alpha(s^{-\alpha\beta*}).$$

Damit berechnen wir

$$\tilde{h}_\alpha(t^{-1}s^{\alpha\beta*})^{-1} = \tilde{h}_\beta(s^{-1})^{-1}\tilde{h}_\alpha(s^{-\alpha\beta*})\tilde{h}_\alpha(t^{-1})^{-1}\tilde{h}_\beta(s^{-1}),$$

also auch

$$\begin{aligned}& \tilde{h}_\alpha(t^{-1}s^{\alpha\beta*})^{-1}\tilde{h}_\beta(s)\tilde{h}_\alpha(t^{-1}) \\ &= \tilde{h}_\beta(s^{-1})^{-1}\tilde{h}_\alpha(s^{-\alpha\beta*})\tilde{h}_\alpha(t^{-1})^{-1}\tilde{h}_\beta(s^{-1})\tilde{h}_\beta(s)\tilde{h}_\alpha(t^{-1}) \\ &= \tilde{h}_\beta(s)c_\beta(s, s^{-1})^{-1}\tilde{h}_\alpha(s^{-\alpha\beta*})\tilde{h}_\alpha(t^{-1})^{-1}c_\beta(s, s^{-1})\tilde{h}_\alpha(t^{-1}) \\ &= \tilde{h}_\beta(s)\tilde{h}_\alpha(s^{-\alpha\beta*})\tilde{h}_\alpha(t^{-1})^{-1}\tilde{h}_\alpha(t^{-1}) \\ &= \tilde{h}_\beta(s)\tilde{h}_\alpha(s^{-\alpha\beta*}) \\ &= \tilde{w}_\alpha(1)\tilde{h}_\beta(s)\tilde{w}_\alpha(-1)\end{aligned}$$

und es folgt endlich

$$\lambda_\alpha^{-1}\lambda(\tilde{h}_\beta(s))\lambda_\alpha(g, \tilde{n}) = (w_\alpha(1)h_\beta(s)w_\alpha(-1)g, \tilde{w}_\alpha(1)\tilde{h}_\beta(s)\tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{n}). \quad \square$$

Lemma 4.30 (Matsumoto, 6.8).

(a). Sei G von Rang 1. Dann ist E eine zentrale Erweiterung von $\mathbb{G}(k)$ durch $\lambda(A)$ und der Steinberg-Kozykel c_E von E ist bereits $\lambda \circ c$.

(b). Sei G von Rang 2. Dann erfüllen $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$ bereits (W1) und (W2).

Dieses Lemma werden wir erst in Abschnitt 4.3.7 beweisen.

Definition 4.31. Sei $\Delta' \subset \Delta$ ein Unterwurzelsystem und $\mathbb{G}'(k) \subset \mathbb{G}(k)$ die Untergruppe, die von $\{x_\alpha(t) \mid t \in k, \pm\alpha \in \Delta'\}$ erzeugt wird. Dann legen wir folgende Bezeichnungen fest:

$$\begin{aligned}U'^+ &:= \mathbb{G}'(k) \cap U^+, & H' &:= \mathbb{G}'(k) \cap H, & N' &:= \mathbb{G}'(k) \cap N, \\ S' &:= p^{-1}(\mathbb{G}'(k)), & \tilde{H}' &:= \varphi^{-1}(H'), & \tilde{N}' &:= \varphi^{-1}(N').\end{aligned}$$

4. Matsumotos Satz

Lemma 4.32 (Matsumoto, 6.9). *Sei $E' \subseteq E$ die von $\lambda(\tilde{H}')$, $\lambda(U'^+)$, $\{\lambda_\beta \mid \beta \in \Delta'\}$ erzeugte Untergruppe. Dann lässt E' schon S' stabil und operiert effektiv auf S' .*

Beweis. Es ist nach Definition der Operationen λ klar, dass $p(\lambda'(s')) \in \mathbb{G}'(k)$ für jedes $\lambda' \in E'$ und jedes $s' \in S'$. Wir betrachten nun den Quotienten $\mathbb{G}(k)/\mathbb{G}'(k)$ und darin eine beliebige Klasse $\bar{g}$. Nach Proposition 3.15, (a) und (c) gibt es in der Nebenklasse $\bar{g} = \mathbb{G}'(k)g$ ein Element g_1 sodass für alle $g' \in \mathbb{G}'(k)$ bereits $\nu(g'g_1) = \nu(g')\nu(g_1)$. Wir wählen ein $\tilde{n}_1 \in \tilde{N}$ mit $\varphi(\tilde{n}_1) = \nu(g_1)$ und definieren eine Abbildung $\tau(g_1, \tilde{n}_1) : S' \rightarrow S$ durch $\tau(g_1, \tilde{n}_1)(g', \tilde{n}') := (g'g_1, \tilde{n}'\tilde{n}_1)$. Das Bild von $\tau(g_1, \tilde{n}_1)$ ist die Bahn von E' durch $(g_1, \tilde{n}_1)$, welche natürlich von E' stabilisiert wird. Für Erzeuger $\varepsilon \in E'$ ist also $\varepsilon \circ \tau = \tau \circ \varepsilon$ auf S' . Wenn also ein $\varepsilon' \in E'$ trivial auf S' operiert, so auch auf $\tau(g_1, \tilde{n}_1)(S')$, damit also auf jeder Bahn und somit operiert ε' überall trivial. $\square$

Lemma 4.33 (Matsumoto, 6.10).

(a). *Wenn $\Delta' = \{\alpha\} \subset \Delta$, so ist die Untergruppe $E' \subset E$ eine zentrale Erweiterung von $\mathbb{G}'(k)$ mit $\lambda(A)$ und $\lambda \circ c_\alpha$ ist der Steinberg-Kozykel von E' in α .*

(b). *Die Elemente $\lambda_\alpha \in E$, $\alpha \in \Delta$ erfüllen die Relationen (W1) und (W2).*

Beweis. Aus Lemma 4.32 wissen wir, dass für $\Delta' \subseteq \Delta$ bereits E' auf S' operiert; nach Lemma 4.29 wie E auf S für das Wurzelsystem Δ' . Mit Lemma 4.30 folgt dann die erste Aussage.

Für λ_α und λ_β können wir annehmen, dass $\{\alpha, \beta\}$ entweder ein Rang 2 Wurzelsystem oder $A_1 \times A_1$ ist, womit die Eigenschaften (W1) und (W2) für $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$ wiederum aus Lemma 4.30 folgen, schließlich für ganz Δ . $\square$

Lemma 4.34 (Matsumoto, 6.11).

(a). *Der Isomorphismus $\lambda : \tilde{H} \xrightarrow{\sim} \lambda(\tilde{H})$ lässt sich fortsetzen zu einem Monomorphismus $\lambda : \tilde{N} \hookrightarrow E$ mit $\lambda(\tilde{w}_\alpha(-1)) = \lambda_\alpha$ für $\alpha \in \Delta$. Der Quotient $\lambda(\tilde{N})/\lambda(\tilde{H})$ ist isomorph zur Weylgruppe W .*

(b). *Sei $\lambda_\sigma \in \lambda(\tilde{N})$ ein Repräsentant von $\sigma \in W$. Wenn α und $\sigma(\alpha)$ positive Wurzeln sind, so gilt in E : $\lambda_\sigma \lambda(U^\alpha) \lambda_\sigma^{-1} = \lambda(U^{\sigma(\alpha)})$.*

(c). *$E = \bigcup_{\sigma \in W} \lambda(U^+) \lambda(\tilde{H}) \lambda_\sigma \lambda(U^+)$ wobei $\{\lambda_\sigma \mid \sigma \in W\}$ ein System von Repräsentanten von $\sigma \in W$ als $\lambda_\sigma \in \lambda(\tilde{N})$ ist.*

(d). *Der Kern von $\pi : E \rightarrow \mathbb{G}(k)$ ist nur $\lambda(A)$. Für jedes $\alpha \in \Delta$ ist der Steinberg-Kozykel der zentralen Erweiterung E von $\mathbb{G}(k)$ gleich $\lambda \circ c_\alpha$.*

Beweis. Nach Lemma 4.29 ist $\lambda(\tilde{H}) \cap \Lambda$ die von den λ_α^2 für $\alpha \in \Delta$ erzeugte Untergruppe in Λ . Da die λ_α nach Lemma 4.33 die Relationen (W1) und (W2) erfüllen, können wir Satz 3.10, Lemma 3.11 und Lemma 4.23 anwenden, wonach die von den λ_α erzeugte Gruppe Λ modulo der von den λ_α^2 erzeugten Gruppe $\lambda(\tilde{H}) \cap \Lambda$ isomorph ist zum Quotienten $\tilde{\mathcal{N}}/\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{N}/\mathcal{H} = W$.

Aus Lemma 4.29 (c) und (d) folgt nun, dass die Abbildung $\tilde{N} \rightarrow E$, die ein $\tilde{n} = \tilde{w}_\alpha(-1)^{-1}\tilde{h}\tilde{w}_\alpha(-1)$ abbildet auf $\lambda_\alpha^{-1}\lambda(\tilde{h})\lambda_\alpha$ eingeschränkt auf $\tilde{H}$ der Isomorphismus $\lambda : \tilde{H} \rightarrow \lambda(\tilde{H})$ ist. Ausserdem ist diese Abbildung $\tilde{N} \rightarrow E$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus, da jedes λ_α nur von $\tilde{w}_\alpha(-1)$ getroffen wird. Der Quotient $\lambda(\tilde{N})/\lambda(\tilde{H})$ ist isomorph zu W , da er die gleiche Präsentation zulässt, damit ist (a) gezeigt.

Für (b) betrachten wir zunächst den Fall $l(\sigma) = 1$, also $\sigma = \sigma_\beta$ für $\beta \in \Delta$. Für $u \in U^\alpha$ ist dann nach Lemma 4.29 (b)

$$\lambda_\beta \lambda(u) \lambda_\beta^{-1} = \lambda(\tilde{w}_\beta(1)u\tilde{w}_\beta(1)^{-1}) \in U^{\sigma_\beta(\alpha)}.$$

Analog gilt das auch für $u \in U^{\sigma_\beta(\alpha)}$, damit ist der Fall gezeigt. Für $l(\sigma) \geq 1$ verwenden wir eine vollständige Induktion über $l(\sigma)$, deren Induktionsanfang wir gerade gezeigt haben. Der Induktionsschritt besteht nun nur noch darin, λ_σ als Produkt $\lambda_\beta \lambda_{\sigma'}$ zu schreiben mit $l(\sigma') < l(\sigma)$.

Um (c) zu zeigen, betrachten wir, wie sich $\bigcup_{\sigma \in W} \left(\lambda(U^+) \lambda(\tilde{H}) \lambda_\sigma \lambda(U^+) \right)$ unter Linksmultiplikation mit den Erzeugern $\lambda(\tilde{h})$, $\lambda(u)$, λ_α verhält. Wenn die Vereinigung stabil unter dieser Multiplikation ist, ist es bereits ganz E . Für $\lambda(\tilde{h})$ und $\lambda(u)$ ist dies klar, für λ_α machen wir folgende Überlegung: Sei $\sigma \in W$, dann ist

$$\lambda_\alpha \lambda(U^+) \lambda(\tilde{H}) \lambda_\sigma \lambda(U^+) = \lambda(U_\alpha^+) \lambda(\tilde{H}) \lambda_\alpha \lambda(U^\alpha) \lambda_\sigma \lambda(U^+).$$

Wenn nun $\sigma^{-1}\alpha \in \Phi^+$, so folgt aus Aussagenteil (b):

$$\lambda(U^\alpha) \lambda_\sigma = \lambda_\sigma \lambda(U^{\sigma^{-1}\alpha}).$$

Setzen wir $\sigma' := \sigma_\alpha \sigma$, so erhalten wir daraus

$$\lambda_\alpha \lambda(U^+) \lambda(\tilde{H}) \lambda_\sigma \lambda(U^+) \subseteq \lambda(U^+) \lambda(\tilde{H}) \lambda_{\sigma'} \lambda(U^+).$$

Ist hingegen $\sigma^{-1}\alpha \notin \Phi^+$, so ist $\sigma'\alpha \in \Phi^+$ und somit (nach Lemma 4.29 (a))

$$\lambda_\alpha \lambda(U^\alpha) \lambda_\alpha^{-1} \subseteq \lambda(U^\alpha) \lambda(\tilde{H}^\alpha) \cup \lambda(U^\alpha) \lambda(\tilde{H}^\alpha) \lambda_\alpha \lambda(U^\alpha).$$

Insgesamt sehen wir also, dass

$$\lambda_\alpha \lambda(U^+) \lambda(\tilde{H}) \lambda_\sigma \lambda(U^\alpha) \subseteq \left(\lambda(U^+) \lambda(\tilde{H}) \lambda_\sigma \lambda(U^+) \right) \cup \left(\lambda(U^+) \lambda(\tilde{H}) \lambda_{\sigma'} \lambda(U^+) \right),$$

und damit ist (c) gezeigt.

Damit nun ein Element aus E trivial auf S operiert, also im Kern der Projektion π auf G liegt, muss es in $\lambda(\tilde{H})$ liegen, da wir nach (c) bereits wissen, dass es in einer der Mengen $\lambda(U^+) \lambda(\tilde{H}) \lambda_\sigma \lambda(U^+)$ liegt, und die Elemente aus $\lambda(U^+)$ sowie die λ_σ nicht-trivial operieren. Damit bleibt nur noch die Teilmenge $\lambda(A) \subset \lambda(\tilde{H})$, die sämtlich trivial operiert. Also ist $\ker(\pi) = \lambda(A) \simeq A$. Aus Lemma 4.33 (a) folgt, dass $\lambda \circ c_\alpha$ genau der Steinberg-Kozykel von $E \twoheadrightarrow \mathbb{G}(k)$ zu der Wurzel α ist. $\square$

4.3.7. Der Fall G von Rang 1 oder 2

Bemerkung 4.35. Im Falle, dass G bzw. Φ von Rang 1 oder 2 ist, genügt es, $\Phi \in \{A_1, A_2, C_2\}$ zu betrachten, da dies die einzigen Wurzelsysteme sind, die als Rang 1 oder 2 Unterwurzelsysteme der von uns nach Lemma 3.38 betrachteten in Frage kommenden sind.

Um zu zeigen, dass E einfach transitiv auf S operiert, betrachten wir eine andere transitive Operation auf S und zeigen danach, dass E mit dieser kommutiert.

Definition 4.36. Sei $\iota : S \rightarrow S$ definiert durch $\iota(g, \tilde{n}) := (g^{-1}, \tilde{n}^{-1})$. Dann ist ι von Ordnung 2. Setze $E^* := \iota E \iota$, dann operiert E^* transitiv auf S . Seien weiter

$$\rho(\tilde{h}) := \iota \lambda(\tilde{h}) \iota, \quad \rho(u) := \iota \lambda(u) \iota, \quad \rho_\alpha := \iota \lambda_\alpha \iota, \quad \text{für } \tilde{h} \in \tilde{H}, u \in U^+, \alpha \in \Delta.$$

Lemma 4.37 (Matsumoto, 7.1). *Seien $\alpha, \beta \in \Delta$ gegeben. Dann gelten:*

- (a). *Die Elemente von $\lambda(\tilde{H})$ und von $\lambda(U^+)$ kommutieren mit den Elementen von E^* , die Elemente von $\rho(\tilde{H})$ und von $\rho(U^+)$ kommutieren mit den Elementen von E .*
- (b). *Seien $\alpha, \beta \in \Delta$. Wenn λ_α mit ρ_β kommutiert, so kommutiert auch ρ_α mit λ_β .*
- (c). *Für jedes $\varepsilon \in \lambda(\tilde{H}) \cup \lambda(U_\alpha^+) \cup \rho(\tilde{H}) \cup \rho(U_\beta^+)$ ist $(\lambda_\alpha^{-1} \rho_\beta \lambda_\alpha \rho_\beta^{-1}) \varepsilon = \varepsilon (\lambda_\alpha^{-1} \rho_\beta \lambda_\alpha \rho_\beta^{-1})$.*
- (d). *Wenn $\lambda_\alpha^{-1} \rho_\beta \lambda_\alpha \rho_\beta^{-1}$ ein Element $s \in S$ fix lässt, so lässt es auch $\lambda_\alpha s$ und $\rho_\beta^{-1} s$ fix.*

Beweis. Die Elemente von $\rho(\tilde{H})$ und von $\rho(U^+)$ kommutieren mit den ursprünglichen Erzeugern von E , denn $\iota \lambda(\tilde{h}) \iota$ und $\iota \lambda(u) \iota$ operieren durch Rechtsmultiplikation auf S , die ursprünglichen Erzeuger hingegen durch Linksmultiplikation. Entsprechend operieren die ursprünglichen Erzeuger von $\iota E \iota$ durch Rechtsmultiplikation auf S , die $\lambda(\tilde{h})$ und $\lambda(u)$ hingegen durch Linksmultiplikation. Damit ist (a) gezeigt.

Angenommen, dass $\lambda_\alpha \rho_\beta = \rho_\beta \lambda_\alpha$, also

$$\lambda_\alpha \iota \lambda_\beta \iota = \iota \lambda_\beta \iota \lambda_\alpha$$

dann können wir durch Links- und Rechtsmultiplikation mit ι

$$\iota \lambda_\alpha \iota \lambda_\beta = \lambda_\beta \iota \lambda_\alpha \iota$$

erhalten, da $\iota^2 = \text{id}$ ist. Das ist aber genau die Aussage

$$\rho_\alpha \lambda_\beta = \lambda_\beta \rho_\alpha,$$

damit ist (b) gezeigt.

Für (c) betrachten wir zunächst $\varepsilon \in \lambda(\tilde{H}) \cup \lambda(U_\alpha^+)$, dann ist

$$(\lambda_\alpha \rho_\beta^{-1}) \varepsilon (\lambda_\alpha \rho_\beta^{-1})^{-1} = \lambda_\alpha \varepsilon \lambda_\alpha^{-1} = (\rho_\beta^{-1} \lambda_\alpha) \varepsilon (\rho_\beta^{-1} \lambda_\alpha)^{-1},$$

denn nach (a) ist $\rho_\beta^{-1}\varepsilon\rho_\beta = \rho_\beta^{-1}\rho_\beta\varepsilon = \varepsilon$ und $\lambda_\alpha\varepsilon\lambda_\alpha^{-1} \in E$. Damit ist nun

$$\begin{aligned} (\lambda_\alpha^{-1}\rho_\beta\lambda_\alpha\rho_\beta^{-1})\varepsilon(\lambda_\alpha^{-1}\rho_\beta\lambda_\alpha\rho_\beta^{-1})^{-1} &= \lambda_\alpha^{-1}\rho_\beta\lambda_\alpha\rho_\beta^{-1}\varepsilon\rho_\beta\lambda_\alpha^{-1}\rho_\beta^{-1}\lambda_\alpha \\ &= \lambda_\alpha^{-1}\rho_\beta\rho_\beta^{-1}\lambda_\alpha\varepsilon\lambda_\alpha^{-1}\rho_\beta\rho_\beta^{-1}\lambda_\alpha \\ &= \lambda_\alpha^{-1}\lambda_\alpha\varepsilon\lambda_\alpha^{-1}\lambda_\alpha = \varepsilon. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir den Fall $\varepsilon \in \rho(\tilde{H}) \cup \rho(U_\beta^+)$, dann ist mit einer analogen Überlegung

$$(\rho_\beta^{-1}\lambda_\alpha)\varepsilon(\rho_\beta^{-1}\lambda_\alpha)^{-1} = \rho_\beta^{-1}\varepsilon\rho_\beta = (\lambda_\alpha\rho_\beta^{-1})\varepsilon(\lambda_\alpha\rho_\beta^{-1})^{-1},$$

und wiederum analog erhalten wir daraus

$$(\lambda_\alpha^{-1}\rho_\beta\lambda_\alpha\rho_\beta^{-1})\varepsilon(\lambda_\alpha^{-1}\rho_\beta\lambda_\alpha\rho_\beta^{-1})^{-1} = \varepsilon.$$

Damit ist (c) gezeigt.

Wenn für ein $s \in S$ die Voraussetzung von (d) erfüllt ist, so ist

$$\lambda_\alpha\rho_\beta^{-1}s = \rho_\beta^{-1}\lambda_\alpha s,$$

also folgt mit Lemma 4.29 (c) und Lemma 4.37 (a)

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha\rho_\beta^{-1}\lambda_\alpha s &= \lambda_\alpha^2\rho_\beta^{-1}s = \rho_\beta^{-1}\lambda_\alpha^2 s, \\ \rho_\beta^{-1}\lambda_\alpha\rho_\beta^{-1}s &= \rho_\beta^{-2}\lambda_\alpha s = \lambda_\alpha\rho_\beta^{-2}s, \end{aligned}$$

und damit sehen wir

$$\lambda_\alpha^{-1}\rho_\beta\lambda_\alpha\rho_\beta^{-1}\lambda_\alpha s = \lambda_\alpha^{-1}\rho_\beta\rho_\beta^{-1}\lambda_\alpha^2 s = \lambda_\alpha^{-1}\lambda_\alpha^2 s = \lambda_\alpha s$$

bzw. analog

$$\lambda_\alpha^{-1}\rho_\beta\lambda_\alpha\rho_\beta^{-1}\rho_\beta^{-1}s = \lambda_\alpha^{-1}\rho_\beta\rho_\beta^{-2}\lambda_\alpha s = \lambda_\alpha^{-1}\rho_\beta^{-1}\lambda_\alpha s = \lambda_\alpha^{-1}\lambda_\alpha\rho_\beta^{-1}s = \rho_\beta^{-1}s$$

womit schließlich auch (d) gezeigt wäre. $\square$

Lemma 4.38. Für $\alpha, \beta \in \Delta$ kommutieren λ_α und ρ_β , d.h.

$$\forall s \in S : \lambda_\alpha\rho_\beta s = \rho_\beta\lambda_\alpha s.$$

Beweisanfang. Es genügt nach Lemma 4.37 (c), diese Aussage für $s \in S_1$ nachzurechnen, wenn S_1 ein Repräsentantensystem der Bahnen der Gruppenoperation von $\lambda(U_\alpha^+)\lambda(\tilde{H})\rho(\tilde{H})\rho(U_\beta^+)$ auf S ist. Deshalb errechnen wir uns zunächst mit der Bruhat-Zerlegung so ein Repräsentantensystem S_1 .

Sei $\sigma \in W$ in reduzierter Darstellung gegeben als $\sigma = \prod_{i=1}^m s_{\alpha_i}$ mit $m = l(\sigma)$. Wir definieren

$$w(\sigma) := \prod_{i=1}^m w_{\alpha_i}(1) \in N, \quad \tilde{w}(\sigma) := \prod_{i=1}^m \tilde{w}_{\alpha_i}(1) \in \tilde{N}.$$

Da die $w_\alpha(1)$ bzw. $\tilde{w}_\alpha(1)$ für $\alpha \in \Phi$ nach Lemma 3.11 bzw. Lemma 4.23 und Lemma 4.26

4. Matsumotos Satz

die Relationen (W1) und (W2) erfüllen, sind $w(\sigma)$ und $\tilde{w}(\sigma)$ nach Proposition 3.13 wohldefiniert. Nun ist klar, dass jede Bahn der Gruppe $\lambda(U_\alpha^+)\lambda(\tilde{H})\rho(\tilde{H})\rho(U_\beta^+)$ ein Element $s \in S$ der Form

$$s = (x_\alpha(u)w(\sigma)x_\beta(v), \tilde{w}(\sigma))$$

mit $\sigma \in W$ und $u, v \in k$ enthält, sodass wir also S_1 als die Menge aller solchen s definieren.

Wir zeigen für $s \in S_1$ die äquivalente Aussage $\lambda_\alpha \rho_\beta^{-1} s = \rho_\beta^{-1} \lambda_\alpha s$, also

$$\lambda_\alpha \rho_\beta^{-1} (x_\alpha(u)w(\sigma)x_\beta(v), \tilde{w}(\sigma)) = \rho_\beta^{-1} \lambda_\alpha (x_\alpha(u)w(\sigma)x_\beta(v), \tilde{w}(\sigma)).$$

Diese Rechnung lässt sich explizit für die Wurzelsysteme A_1, A_2 und C_2 durchführen. Bevor wir dies tun, benötigen wir noch eine Proposition und ein Lemma.

Proposition 4.39. *Sei $\Phi \in \{A_1, A_2, C_2\}$, einfache Wurzeln $\alpha, \beta \in \Phi$ und $\sigma \in W(\Phi)$ gegeben. Dann gelten:*

(a). *Wenn $\sigma(\beta) \neq \pm\alpha$, dann ist*

$$l(\sigma_\alpha \sigma) - l(\sigma) = l(\sigma_\alpha \sigma \sigma_\beta) - l(\sigma \sigma_\beta),$$

$$l(\sigma \sigma_\beta) - l(\sigma) = l(\sigma_\alpha \sigma \sigma_\beta) - l(\sigma_\alpha \sigma).$$

(b). *Wenn $\sigma(\beta) = \pm\alpha$, dann ist $\sigma \sigma_\beta = \sigma_\alpha \sigma$.*

(c). *Wenn $\sigma(\beta) = -\alpha$, dann ist außerdem $l(\sigma \sigma_\beta) = l(\sigma) - 1$.*

Für jede Aussage ist eine Fallunterscheidung für $\Phi \in \{A_1, A_2, C_2\}$ sowie für $\alpha = \beta$ oder $\alpha \neq \beta$ vorzunehmen, dann folgen die Aussage durch explizite Rechnung mit den Elementen der entsprechenden Weylgruppen aus Beispiel A.1 und Beispiel A.2. $\diamond$

Lemma 4.40 (Matsumoto, 7.2).

(a). *Wenn $c \in S(k^\times, A)$, so ist für alle $u, v \in k^\times$ mit $1 - uv \neq 0$:*

$$c(u^{-1}, (v - u^{-1})^{-1}) = c((u - v^{-1})^{-1}, v^{-1}).$$

(b). *Seien $\alpha, \beta \in \Delta$ und $\sigma \in W$, sodass $\sigma(\beta) = \alpha$. Dann ist für alle $v \in k, t \in k^\times$:*

$$w(\sigma)x_\beta(v)w(\sigma)^{-1} = x_\alpha(v) \quad \text{und} \quad \tilde{w}(\sigma)\tilde{h}_\beta(t)\tilde{w}(\sigma)^{-1} = \tilde{h}_\alpha(t).$$

Beweis. Aussagenteil (a) lässt sich wie im Beweis von Lemma 4.16, Behauptung (e) beweisen, wenn wir die durch c definierte Erweiterung von Rang 1 betrachten.

Für Aussagenteil (b) machen wir eine Fallunterscheidung. Wir betrachten zunächst den Fall $\alpha = \beta$ und $\sigma = \text{id}$, für beliebige Wurzelsysteme Φ , denn dann ist nichts zu zeigen. Die anderen Fälle sind der Fall $\alpha = \beta, \sigma = \sigma_\gamma \sigma_\alpha \sigma_\gamma$ für $\Phi = C_2$, wobei γ die andere einfache Wurzel neben α bezeichnet, und der Fall $\alpha \neq \beta, \sigma = \sigma_\beta \sigma_\alpha$ für $\Phi = A_2$. Für die Aussagen $w(\sigma)x_\beta(v)w(\sigma)^{-1} = x_\alpha(v)$ lässt sich in beiden Fällen Lemma 4.4,

Teil (b) auf die triviale Erweiterung $\mathbb{G}(k) \rightarrow \mathbb{G}(k)$ anwenden. Es bleiben also noch die folgenden zwei Aussagen zu zeigen:

- (I) Für $\Phi = C_2$: $\tilde{w}(\sigma_\gamma \sigma_\alpha \sigma_\gamma) \tilde{h}_\alpha(t) \tilde{w}(\sigma_\gamma \sigma_\alpha \sigma_\gamma)^{-1} = \tilde{h}_\alpha(t),$
 (II) Für $\Phi = A_2$: $\tilde{w}(\sigma_\beta \sigma_\alpha) \tilde{h}_\beta(t) \tilde{w}(\sigma_\beta \sigma_\alpha)^{-1} = \tilde{h}_\alpha(t).$

Für Teil (I) rechnen wir: $\tilde{w}(\sigma_\gamma \sigma_\alpha \sigma_\gamma) \tilde{h}_\alpha(t) \tilde{w}(\sigma_\gamma \sigma_\alpha \sigma_\gamma)^{-1}$

$$\begin{aligned}
 &= \tilde{w}_\gamma(1) \tilde{w}_\alpha(1) \tilde{w}_\gamma(1) \tilde{h}_\alpha(t) \tilde{w}_\gamma(1)^{-1} \tilde{w}_\alpha(1)^{-1} \tilde{w}_\gamma(1)^{-1} \\
 &= \tilde{w}_\gamma(1) \tilde{w}_\alpha(1) \tilde{h}_\alpha(t) \tilde{h}_\gamma(t^{-\gamma\alpha^*}) \tilde{w}_\alpha(1)^{-1} \tilde{w}_\gamma(1)^{-1} \\
 &= \tilde{w}_\gamma(1) \tilde{w}_\alpha(1) \tilde{h}_\alpha(t) \tilde{w}_\alpha(1)^{-1} \tilde{w}_\alpha(1) \tilde{h}_\gamma(t^{-\gamma\alpha^*}) \tilde{w}_\alpha(1)^{-1} \tilde{w}_\gamma(1)^{-1} \\
 &= \tilde{w}_\gamma(1) \tilde{h}_\alpha(t^{-1}) \tilde{h}_\gamma(t^{-\gamma\alpha^*}) \tilde{h}_\alpha(t^{\gamma\alpha^* \alpha \gamma^*}) \tilde{w}_\gamma(1)^{-1} \\
 &= \tilde{w}_\gamma(1) \tilde{h}_\alpha(t^{-1}) \tilde{h}_\alpha(t^2) \tilde{h}_\gamma(t^{-\gamma\alpha^*}) \tilde{w}_\gamma(1)^{-1} \\
 &= \tilde{w}_\gamma(1) \tilde{h}_\alpha(t) \tilde{h}_\gamma(t^{-\gamma\alpha^*}) \tilde{w}_\gamma(1)^{-1} \\
 &= \tilde{h}_\alpha(t) \tilde{h}_\gamma(t^{-\gamma\alpha^*}) \tilde{h}_\gamma(t^{\gamma\alpha^*}) \\
 &= \tilde{h}_\alpha(t) c_\gamma(t^{-\gamma\alpha^*}, t^{\gamma\alpha^*}) \\
 &= \tilde{h}_\alpha(t) c_\alpha(t, t^{-\alpha\gamma^* \gamma \alpha^*})^{-1} \\
 &= \tilde{h}_\alpha(t) c_\alpha(t, t^{-2})^{-1} \\
 &= \tilde{h}_\alpha(t).
 \end{aligned}$$

Für Teil (II) rechnen wir ebenso: $\tilde{w}(\sigma_\beta \sigma_\alpha) \tilde{h}_\beta(t) \tilde{w}(\sigma_\beta \sigma_\alpha)^{-1}$

$$\begin{aligned}
 &= \tilde{w}_\beta(1) \tilde{w}_\alpha(1) \tilde{h}_\beta(t) \tilde{w}_\alpha(1)^{-1} \tilde{w}_\beta(1)^{-1} \\
 &= \tilde{w}_\beta(1) \tilde{h}_\beta(t) \tilde{h}_\alpha(t^{-\alpha\beta^*}) \tilde{w}_\beta(1)^{-1} \\
 &= \tilde{w}_\beta(1) \tilde{h}_\beta(t) \tilde{w}_\beta(1)^{-1} \tilde{w}_\beta(1) \tilde{h}_\alpha(t) \tilde{w}_\beta(1)^{-1} \\
 &= \tilde{h}_\beta(t^{-1}) \tilde{h}_\alpha(t) \tilde{h}_\beta(t^{-\beta\alpha^*}) \\
 &= \tilde{h}_\alpha(t) \tilde{h}_\beta(t^{-1}) \tilde{h}_\beta(t) c_\beta(t, t) \\
 &= \tilde{h}_\alpha(t) c_\beta(t^{-1}, t) c_\beta(t, t) \\
 &= \tilde{h}_\alpha(t).
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.41. Im Artikel von Matsumoto besteht Lemma 7.2 aus den Aussagen von Proposition 4.39 und Lemma 4.40.

Nun können wir endlich abschließen mit dem

Beweis von Lemma 4.38. Wenn $\sigma(\beta) \neq \pm\alpha$, so ist für $g := x_\alpha(u)w(\sigma)x_\beta(v)$ nach Lemma 4.4 (b), angewandt auf die triviale Erweiterung $\mathbb{G}(k) \rightarrow \mathbb{G}(k)$:

$$\begin{aligned}
 \nu(g) &= w(\sigma), \quad \nu(gw_\beta(-1)) = w(\sigma)w_\beta(1)^{-1}, \\
 \nu(w_\alpha(-1)g) &= w_\alpha(1)^{-1}w(\sigma), \quad \nu(w_\alpha(-1)gw_\beta(-1)) = w_\alpha(1)^{-1}w(\sigma)w_\beta(1)^{-1}
 \end{aligned}$$

4. Matsumotos Satz

und somit direkt

$$\begin{aligned} \nu(g)^{-1}\nu(gw_\beta(-1)) &= \nu(w_\alpha(-1)g)^{-1}\nu(w_\alpha(-1)gw_\beta(-1)) \\ \text{und } \nu(w_\alpha(-1)g)\nu(g)^{-1} &= \nu(w_\alpha(-1)gw_\beta(-1))\nu(gw_\beta(-1))^{-1}, \end{aligned}$$

woraus wegen $s = (g, \tilde{w}(\sigma))$ durch das Einsetzen der Definition von λ_α und ρ_β direkt folgt, dass

$$\lambda_\alpha(\rho_\beta^{-1}(s)) = \rho_\beta^{-1}(\lambda_\alpha(s)).$$

Wenn $\sigma(\beta) = \alpha$ ist, wissen wir aus Lemma 4.40 (b), dass $w(\sigma)x_\beta(v) = x_\alpha(v)w(\sigma)$ ist, also können wir $v = 0$ annehmen, d.h. $g = x_\alpha(u)w(\sigma)$ mit $u \neq 0$. Dann ist $\nu(gw_\beta(-1)) = \nu(g)w_\beta(1)^{-1}$ und $\nu(w_\alpha(-1)gw_\beta(-1)) = h_\alpha(u^{-1})\nu(gw_\beta(-1))$, daher mit Proposition 4.39 (b)

$$\tilde{\nu}(\lambda_\alpha(\rho_\beta^{-1}(g, \tilde{w}(\sigma))) = \tilde{h}_\alpha(u^{-1})\tilde{w}(\sigma)\tilde{h}_\beta(-1)\tilde{w}_\beta(1) = \tilde{h}_\alpha(u^{-1})\tilde{h}_\alpha(-1)\tilde{w}(\sigma\sigma_\beta).$$

Auf der anderen Seite ist

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(\rho_\beta^{-1}(\lambda_\alpha(g, \tilde{w}(\sigma))) &= \tilde{w}_\alpha(-1)\tilde{w}(\sigma)\tilde{h}_\beta(u) \\ &= \tilde{h}_\alpha(-1)\tilde{w}_\alpha(1)\tilde{h}_\alpha(u)\tilde{w}(\sigma) \\ &= \tilde{h}_\alpha(-1)\tilde{h}_\alpha(u^{-1})\tilde{w}(\sigma_\alpha\sigma). \end{aligned}$$

Mit Proposition 4.39 (b) folgt also

$$\lambda_\alpha(\rho_\beta^{-1}(s)) = \rho_\beta^{-1}(\lambda_\alpha(s)).$$

Wenn $\sigma(\beta) = -\alpha$ ist, und $uv(1 - uv) = 0$ ist, also $uv = 0$ oder $uv = 1$, so können wir uns mit Lemma 4.37 auf den vorigen Fall zurückziehen. Sei also $\sigma(\beta) = -\alpha$ und $uv(1 - uv) \neq 0$ und $g = x_\alpha(u)w(\sigma)x_\beta(v)$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} gw_\beta(-1) &= x_\alpha(u)w(\sigma\sigma_\beta)x_\beta(-v^{-1})w_\beta(1)h_\beta(v)x_\beta(-v^{-1}) \\ &= x_\alpha(u - v^{-1})w(\sigma)h_\beta(v)x_\beta(-v^{-1}). \end{aligned}$$

Damit sehen wir

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(\lambda_\alpha(\rho_\beta^{-1}(g, \tilde{w}(\sigma))) &= \tilde{h}_\alpha((u - v^{-1})^{-1})\tilde{w}(\sigma)\tilde{h}_\beta(v) \\ &= \tilde{h}_\alpha((u - v^{-1})^{-1})\tilde{h}_\alpha(v^{-1})\tilde{w}(\sigma), \end{aligned}$$

auf der anderen Seite

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(\rho_\beta^{-1}(\lambda_\alpha(g, \tilde{w}(\sigma))) &= \tilde{h}_\alpha(u^{-1})\tilde{w}(\sigma)\tilde{h}_\beta(v - u^{-1}) \\ &= \tilde{h}_\alpha(u^{-1})\tilde{h}_\alpha((v - u^{-1})^{-1})\tilde{w}(\sigma). \end{aligned}$$

Mit Proposition 4.39 (b) folgt also auch hier

$$\lambda_\alpha(\rho_\beta^{-1}(s)) = \rho_\beta^{-1}(\lambda_\alpha(s)).$$

□

Lemma 4.42. *Seien E, E^* zwei Gruppen, die auf einer Menge S transitiv operieren (d.h. für alle $s_1, s_2 \in S$ gibt es $e \in E$ und $e^* \in E^*$ sodass $e.s_1 = s_2$ und $e^*.s_1 = s_2$) und effektiv operieren (d.h. für jedes $e \in E$ mit $e \neq \text{id}$ und jedes $e^* \in E^*$ mit $e^* \neq \text{id}$ gibt es $s_1, s_2 \in S$ sodass $e.s_1 \neq s_1$ und $e^*.s_2 \neq s_2$). Wenn die Operationen miteinander verträglich sind (d.h. für alle $s \in S$ und alle $e \in E, e^* \in E^*$ ist $e^*.e.s = e.e^*.s$), so operieren E und E^* bereits einfach transitiv auf S (d.h. für je zwei $s_1, s_2 \in S$ gibt es genau ein $e \in E$ und genau ein $e^* \in E^*$ sodass $e.s_1 = s_2$ und $e^*.s_1 = s_2$).*

Beweis. Seien $e_1, e_2 \in E$ und $s_1 \in S$. Setze $s_2 := e_1.s_1$. Wir nehmen an, dass $e_2.s_1 = s_2$ und zeigen damit, dass $e_2 = e_1$ folgt.

Sei $s_3 \in S$ beliebig und $s_4 := e_1^{-1}e_2.s_3$. Mit der Transitivität der Operation von E^* können wir $e^* \in E^*$ wählen, sodass $e^*.s_3 = s_1$ ist. Dann ist

$$s_4 = (e^*)^{-1}e^*.e_1^{-1}e_2.s_3,$$

was wir mit der Verträglichkeit der beiden Operationen äquivalent formulieren können:

$$s_4 = (e^*)^{-1}.e_1^{-1}e_2.e^*.s_3 = (e^*)^{-1}.e_1^{-1}e_2.s_1 = (e^*)^{-1}.s_1 = s_3.$$

Also hält $e_1^{-1}e_2$ auch s_3 fest. Da wir s_3 beliebig gewählt haben, operiert $e_1^{-1}e_2$ als Identität auf S . Da die Operation von E als effektiv vorausgesetzt wurde, ist $e_1^{-1}e_2$ bereits die Identität. $\square$

Abschließend können wir die Resultate dieses Abschnittes einsammeln.

Beweis von Lemma 4.30. Nun haben wir in Lemma 4.38 gesehen, dass die $\lambda_\alpha \in E$ mit den $\rho_\beta \in E^*$ kommutieren, zusammen mit Lemma 4.37 wissen wir also, dass jedes Element von E mit jedem Element aus E^* kommutiert. Da E, E^* transitiv und effektiv auf S operieren, operieren sie also nach Lemma 4.42 einfach transitiv auf S .

Damit lässt sich nun auf S durch Wahl eines neutralen Elements eine Gruppenstruktur definieren, sodass $S \simeq E$ ist.

Die Elemente $\tilde{w}_\alpha(-1)$, $\alpha \in \Delta$ erfüllen (W1) und (W2), also erfüllen die $\lambda_\alpha \in E$ die gleichen Relationen.

Im Rang-1-Fall ist nach Bruhat-Zerlegung von $\mathbb{G}(k)$ die Gruppe E gleich der Vereinigung der $\lambda(U^+)\lambda(\tilde{H})$ und der $\lambda(U^+)\lambda(\tilde{H})\lambda_\alpha\lambda(U^+)$. Damit ist $\ker(\pi : E \rightarrow \mathbb{G}(k)) = \lambda(A)$.

Wir setzen

$$\xi_\alpha(u) := \lambda(x_\alpha(u)) \text{ und } \xi_{-\alpha}(u) := \lambda_\alpha \xi_\alpha(-u) \lambda_\alpha^{-1},$$

dann ist für alle $t \in k^\times$:

$$\omega_\alpha(t) = \xi_\alpha(t) \xi_{-\alpha}(-t^{-1}) \xi_\alpha(t) = \lambda(\tilde{h}_\alpha(t)) \lambda_\alpha^{-1}.$$

Nach den Lemmata 4.29 (a), 4.13 (c) und 4.4 liefern ξ_α und $\xi_{-\alpha}$ die Isomorphismen von k nach $\pi^{-1}(U^\alpha)$ und $\pi^{-1}(U^{-\alpha})$ die zur Definition des Steinberg-Kozykels c_E in α relativ zu den x_α und $x_{-\alpha}$ herangezogen wurden. Damit ist $c_E = \lambda \circ c_\alpha = \lambda \circ c$, wobei c der zu Anfang vorgegebene Steinberg-Kozykel ist. $\square$

5. Abstrakte Homotopietheorie

5.1. Modellkategorien

In diesem Kapitel wird die Theorie der Modellkategorien im Sinne von Quillen [Qui67] vorgestellt, wobei wir unter einer Modellkategorie stets das verstehen, was Quillen als *geschlossene* Modellkategorie definiert, mit der kleinen Änderung, dass wir die Existenz von funktoriellen fibranten und kofibranten Faktorisierungen sowie die Existenz aller kleinen Limiten und Kolimiten fordern. Zur Theorie von Modellkategorien ist [DS95] eine gelungene Einführung. Als Referenz verwenden wir in diesem Abschnitt [Hir03].

Definition 5.1. Wir betrachten das folgende Diagramm in einer beliebigen Kategorie:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & X \\ \psi \downarrow & \exists \hat{f} \nearrow & \downarrow \varphi \\ Z & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Für Morphismen φ, ψ wie im Diagramm definieren wir: Wenn für jedes Paar f, g der Morphismus $\hat{f}$ existiert (sodass das Diagramm kommutiert), so hat φ bezüglich ψ die *linke Liftungseigenschaft* und ψ bezüglich φ die *rechte Liftungseigenschaft*.

Definition 5.2. Seien $f : A \rightarrow B$ und $g : C \rightarrow D$ Morphismen in einer Kategorie. Wenn es Morphismen $A \rightarrow C \rightarrow A$ und $B \rightarrow D \rightarrow B$ gibt, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_A & & \\ & \text{A} & \xrightarrow{\quad} & \text{C} & \xrightarrow{\quad} & \text{A} \\ & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow f \\ & \text{B} & \xrightarrow{\quad} & \text{D} & \xrightarrow{\quad} & \text{B} \\ & & \text{id}_B & & \end{array}$$

kommutiert, so nennen wir f einen *Retrakt* von g .

Das ist [Hir03, Definition 7.1.1, S. 108].

Definition 5.3. Eine Modellkategorie ist eine Kategorie $\mathcal{M}$ mit drei Klassen von Morphismen $W, C, F \subset \text{Mor } \mathcal{M}$ (genannt schwache Äquivalenzen, Kofaserungen, Faserungen), die folgende Axiome erfüllen:

- M1 Die Kategorie $\mathcal{M}$ ist vollständig und kovollständig, d.h. enthält alle kleinen Limiten und Kolimiten.
- M2 Sind $f, g \in \text{Mor } \mathcal{M}$ sodass $g \circ f$ definiert ist, und sind zwei verschiedene Elemente aus $\{f, g, g \circ f\}$ schwache Äquivalenzen, so ist auch $\{f, g, g \circ f\} \subset W$.

5. Abstrakte Homotopietheorie

- M3 Sind $f, g \in \text{Mor } \mathcal{M}$ sodass f ein Retrakt von g ist, so gilt für jede Klasse $K \in \{W, C, F\}$ bereits $g \in K \implies f \in K$.
- M4 Kofaserungen haben die rechte Liftungseigenschaft bezüglich Faserungen, die zugleich schwache Äquivalenzen sind. Faserungen haben die linke Liftungseigenschaft bezüglich Kofaserungen, die zugleich schwache Äquivalenzen sind.
- M5 Ist $h \in \text{Mor } \mathcal{M}$, so gibt es zwei funktorielle Faktorisierungen $h = g \circ f$, wobei g eine Faserung und f eine Kofaserung ist:
- a) g ist außerdem eine schwache Äquivalenz;
 - b) f ist außerdem eine schwache Äquivalenz.

Diese Definition ist [Hir03, Definition 7.1.3, S. 109].

Definition 5.4. Sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie und X ein Objekt in $\mathcal{M}$. Dann heißt X *fibrant*, wenn der terminale Morphismus $X \rightarrow \text{pt}$ eine Faserung ist. Anders herum heißt X *kofibrant*, wenn der initiale Morphismus $\emptyset \rightarrow X$ eine Kofaserung ist.

Bemerkung 5.5. In jeder Modellkategorie $\mathcal{M}$ lässt sich zu einem Objekt X der terminale Morphismus $X \rightarrow \text{pt}$ nach Axiom M5 funktoriell faktorisieren in eine schwache Äquivalenz $X \rightarrow \tilde{X}$ gefolgt von einer Faserung $\tilde{X} \rightarrow \text{pt}$. Man nennt dann $\tilde{X}$ eine *fibrante Ersetzung* von X . Analog gibt es funktorielle kofibrante Ersetzungen in $\mathcal{M}$.

Definition 5.6. Sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie. Dann nennt man die Kategorie, die man durch Lokalisierung an der Klasse der schwachen Äquivalenzen erhält, die *Homotopiekategorie* $\mathcal{Ho}\mathcal{M}$ von $\mathcal{M}$.

Zu Lokalisierungen von kleinen Kategorien siehe etwa [Mac71, Kapitel II.8, Proposition 1, S. 51]. Es ist ein Satz, dass man für Modellkategorien stets (mit Hilfe fibranter und kofibranter Ersetzungen) so lokalisieren kann, dass man nicht zu einem größeren Universum übergehen muss, siehe z.B. [GJ99, Kapitel I.1, Theorem 1.11, S. 81].

Als Beispiel, und da wir später die geometrische Realisierung einer simplizialen Menge zur Definition der Modellstruktur auf simplizialen Mengen benötigen, betrachten wir eine Modellkategorie von CW-Komplexen.

Beispiel 5.7. Sei $\mathcal{M}$ die Kategorie der kompakt erzeugten Hausdorffräume. Diese ist vollständig und kovollständig (mit dem Kelley-Produkt anstelle des kartesischen Produkts). Wir nennen eine Abbildung Faserung, wenn sie die linke Liftungseigenschaft bezüglich aller Inklusionen $S^n \hookrightarrow D^n$ hat. Wir nennen eine Abbildung Kofaserung, wenn sie einen relativen CW-Komplex definiert (also zerlegt werden kann in eine Sequenz von Anklebungen von Zellen). Wir nennen eine Abbildung schwache Äquivalenz, wenn sie Isomorphismen auf allen (klassischen) Homotopiegruppen induziert. Dann ist damit eine Modellstruktur auf $\mathcal{M}$ definiert, die man *Serre-Modellstruktur* nennt.

Definition 5.8. Hat $\mathcal{C}$ ein finales Objekt pt , so heißt für ein Objekt X in $\mathcal{C}$ ein Morphismus $*$: $\text{pt} \rightarrow X$ auch *Basispunkt* und $(X, *)$ heißt *punktiert*. Damit ist die Kategorie $\mathcal{C}_*$ der punktierten Objekte von X definiert, mit Morphismen die Morphismen von $\mathcal{C}$, die mit den Basispunkten kommutieren. Wir schreiben für das

Koprodukt von $(X, *)$ und $(Y, *)$ in $\mathcal{C}_*$ auch $(X \vee Y, *)$. Es gibt, wenn das Koprodukt in $\mathcal{C}_*$ und das Produkt in $\mathcal{C}$ existiert, einen eindeutigen Morphismus in $\mathcal{C}$

$$X \vee Y \rightarrow X \times Y$$

der mit den Projektionen auf X und Y verträglich ist. Den Kokern dieses Morphismus, sofern existent in $\mathcal{C}$, wollen wir mit $X \wedge Y$ bezeichnen, und nennen dies das *Smash-Produkt* von $(X, *)$ mit $(Y, *)$. Wählt man auf $X \times Y$ den Basispunkt $*$: $\text{pt} \rightarrow *_X \times *_Y$, so induziert dies auf $X \wedge Y$ einen Basispunkt.

Wir werden Basispunkte in der Notation oft weglassen, wenn klar ist, welche Wahl wir getroffen haben.

Definition 5.9. Sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie. Dann heißt $\mathcal{M}$ *eigentliche Modellkategorie*, wenn jeder Pushout einer schwachen Äquivalenz entlang einer Kofaserung wieder eine schwache Äquivalenz ist und wenn zusätzlich jeder Pullback einer schwachen Äquivalenz entlang einer Faserung wieder eine schwache Äquivalenz ist.

Das ist [Hir03, Definition 13.1.1., Chapter 13, S. 239]. Eigentlichkeit erlaubt eine einfache Berechnung bzw. Definition von Homotopielimiten und -kolimiten.

In Abschnitt 7.2 benötigen wir eine homotopietheoretische Abschwächung des Begriffs “kartesisches Quadrat”, die wir hier schon einführen können.

Definition 5.10. Sei $\mathcal{M}$ eine eigentliche Modellkategorie und

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in $\mathcal{M}$. Dieses Diagramm heißt *homotopiekartesisch*, wenn es eine Faktorisierung $f = p \circ i$ mit $i : X \rightarrow \tilde{X}$ einer schwachen Äquivalenz und $p : \tilde{X} \rightarrow Y$ einer Faserung gibt, derart dass der durch i induzierte Morphismus

$$i_* : W \rightarrow Z \times_Y \tilde{X}$$

eine schwache Äquivalenz ist.

Diese Definition findet sich z.B. in [GJ99, Kapitel II.9, S. 137]. Ein Quadrat ist also homotopiekartesisch, wenn es durch eine schwach äquivalente fibrante Ersetzung von f kartesisch wird.

5.2. Simpliziale Objekte

In diesem Kapitel wird die Theorie simplizialer Mengen, wie etwa in [May92] oder [GJ99] ausgeführt, kurz vorgestellt, sofern wir sie benötigen.

Definition 5.11. Die Kategorie der endlichen Ordinalzahlen Δ ist definiert als $\text{Ob}(\Delta) := \{[n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit der Notation $[n] := \{0, \dots, n\}$, und

$$\text{Hom}_\Delta([n], [m]) := \{f : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\} \mid f \text{ monoton}\}.$$

Dabei heißt eine Abbildung *monoton*, wenn für alle $i \leq j$ stets $f(i) \leq f(j)$ ist.

Die monotonen Abbildungen werden von speziellen monotonen Abbildungen unter Verknüpfung erzeugt, den *Korandabbildungen* $d^i : [n-1] \rightarrow [n]$ für $0 \leq i \leq n$

$$d^i : k \mapsto \begin{cases} k, & k < i, \\ k+1, & k \geq i \end{cases}$$

und den *Koentartungsabbildungen* $s^j : [n+1] \rightarrow [n]$ für $0 \leq j \leq n$

$$s^j : k \mapsto \begin{cases} k, & k \leq j, \\ k-1, & k > j. \end{cases}$$

Sie erfüllen die *kosimplizialen Identitäten* (die man leicht nachrechnet):

$$\begin{cases} d^j d^i = d^i d^{j-1}, & i < j, \\ s^j d^i = d^i s^{j-1}, & i < j, \\ s^j d^j = 1 = s^j d^{j+1}, \\ s^j d^i = d^{i-1} s^j, & i > j+1, \\ s^j s^i = s^i s^{j+1}, & i \leq j. \end{cases}$$

Ein *kosimpliziales Objekt* $X^\bullet$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Funktor $X : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$. Äquivalent kann man ein System Objekten $X^n \in \mathcal{C}$ und Morphismen d^i, s^j in $\mathcal{C}$ spezifizieren, die die kosimplizialen Identitäten erfüllen. Ein *simpliziales Objekt* $Y_\bullet$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Funktor $Y : \Delta^{op} \rightarrow \mathcal{C}$. Äquivalent kann man ein System von Objekten $Y_n \in \mathcal{C}$ sowie Morphismen d_i, s_j in $\mathcal{C}$ (genannt *Ränder* und *Entartungen*) spezifizieren, die die *simplizialen Identitäten* erfüllen, die den kosimplizialen Identitäten in $\mathcal{C}^{op}$ entsprechen.

Morphismen von (ko)simplizialen Objekten sind natürliche Transformationen der entsprechenden Funktoren oder, äquivalent ausgedrückt, Systeme von Morphismen, die mit den (ko)simplizialen Identitäten verträglich sind.

Definition 5.12. In der Kategorie der Mengen definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein simpliziales Objekt

$$\Delta^n := \text{Hom}(\cdot, [n]) : \Delta^{op} \rightarrow \text{Set}, \text{ den } n\text{-ten Standardsimplex.}$$

Dieser trägt einen natürlichen Basispunkt als $\text{id}_{[0]} \in \Delta^0$.

Bemerkung 5.13. Für jede simpliciale Menge $X_\bullet$ ist die Morphismenmenge in der Kategorie der simplicialen Mengen $\text{Hom}(\Delta^n, X_\bullet)$ isomorph zu X_n , indem man jedem Morphismus $\varphi : \Delta^n \rightarrow X_\bullet$ das Simplex $\varphi(\text{id}_{[n]}) \in X_n$ zuordnet. Das ist eine einfache Konsequenz aus dem Yoneda-Lemma, siehe [Mac71, Kapitel III.2, S. 59]. Damit gibt es zu jedem Simplex $\sigma \in X_n$ genau einen Morphismus $\Delta^n \rightarrow X_\bullet$, den wir ebenfalls mit σ bezeichnen.

Definition 5.14. Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$ Unterobjekte von Δ^n , und zwar für alle $0 \leq k \leq n$, die sogenannten *k-ten Hörner*

$\Lambda_k^n :=$ das Unterobjekt, welches von allen $d_j(\text{id}_{[n]})$ mit $j \neq k$ erzeugt wird.

Dabei bedeutet “erzeugt” hier, dass zu einem Simplex $\sigma \in \Lambda_k^n \subseteq \Delta^n$ auch die Simplizes $d_j(\sigma)$ und $s_i(\sigma)$ in Λ_k^n liegen sollen (sonst wäre so keine simpliciale Menge definiert). Weiter definieren wir den *Rand* von Δ^n als

$\partial\Delta^n :=$ das Unterobjekt, welches von allen $d_j(\text{id}_{[n]})$ erzeugt wird.

Damit ist die *simpliciale n-Sphäre* definiert als

$$S^n := \Delta^n / \partial\Delta^n.$$

Definition 5.15. Sei $X_\bullet$ eine zusammenhängende simpliciale Menge mit Basispunkt $*$. Der *Pfadkomplex* $PX_\bullet$ von $X_\bullet$ ist definiert als Pullback von

$$(d^0)^* : \text{Hom}(\Delta^1 \times \Delta^\bullet, X_\bullet) \rightarrow \text{Hom}(\Delta^0 \times \Delta^\bullet, X_\bullet) \simeq X_\bullet$$

mit dem konstanten Morphismus $* : \Delta^0 \rightarrow X_\bullet$. Sei $\pi : PX_\bullet \rightarrow X_\bullet$ definiert über die Komposition

$$PX_\bullet \xrightarrow{\text{proj}} \text{Hom}(\Delta^1 \times \Delta^\bullet, X_\bullet) \xrightarrow{(d^1)^*} \text{Hom}(\Delta^0 \times \Delta^\bullet, X_\bullet) \simeq X_\bullet.$$

Dann ist der *Schleifenkomplex* von $(X_\bullet, *)$ definiert als Faser von π über dem Basispunkt $*$, also $\Omega X_\bullet := \pi^{-1}(*)$.

Das sind Definitionen von [GJ99, S. 32-33].

Bemerkung 5.16. Somit sind die n -Simplizes des Schleifenraums $\Omega X_\bullet$ genau die simplicialen Abbildungen $\Delta^n \times \Delta^1 \rightarrow X_\bullet$, sodass die Restriktion auf $\Delta^n \times \partial\Delta^1$ auf $*$ abgebildet wird.

Definition 5.17. Sei $X_\bullet$ eine zusammenhängende simpliciale Menge mit Basispunkt $*$. Die (*reduzierte*) *Suspension* $\Sigma X_\bullet$ von $X_\bullet$ ist definiert als Quotient von $X_\bullet \times \Delta^1$ unter der Äquivalenzrelation, die erzeugt wird von $(x, \sigma) \sim (x', \sigma)$ für alle $x, x' \in X_\bullet$ und $\sigma \in \Lambda_0^1 \cup \Lambda_1^1$ sowie $(*, \sigma) \sim (*, \sigma')$ für alle $\sigma \in \Delta^1$.

Definition 5.18. Sei $X_\bullet$ eine simpliciale Menge und $|\Delta^\bullet|$ das “Standard”-kosimpliciale Objekt mit $|\Delta^n| = \{(x_i) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0\}$ dem Standardsimplex und offensichtlichen Rand- und Entartungsabbildungen. Dann heißt

$$|X_\bullet| := \lim_{\Delta^n \rightarrow X_\bullet} |\Delta^n|$$

5. Abstrakte Homotopietheorie

die *geometrische Realisierung* von $X_\bullet$ (bezüglich $|\Delta^\bullet|$).

Bemerkung 5.19. Diese Konstruktion liefert zu jeder simplizialen Menge $X_\bullet$ einen CW-Komplex $|X_\bullet|$, vergleiche [Hir03, Example 16.3.5, S.324]. Umgekehrt kann man jedem topologischen Raum Y seine singuläre Auflösung $Sing(Y) = \text{Hom}(|\Delta^n|, Y)$ zuordnen, eine simpliziale Menge, die z.B. bei der Konstruktion der singulären (Ko)Homologie eines topologischen Raums Verwendung findet. Diese Konstruktionen sind funktoriell und zueinander adjungiert. Wählt man auf CW-Komplexen die sogenannte Serre-Modellstruktur, so ist die Homotopietheorie von CW-Komplexen genau die selbe wie die von simplizialen Mengen mit der Kan-Modellstruktur. Um das zu präzisieren, benötigt man den Begriff der Quillen-Äquivalenz wie in [Hir03, Definition 8.5.20, S. 157]. Wir werden darauf allerdings nicht näher eingehen.

Definition 5.20. Ein Morphismus simplizialer Mengen heißt *schwache Äquivalenz*, wenn seine geometrische Realisierung eine schwache Äquivalenz ist (d.h. Isomorphismen auf Homotopiegruppen induziert; dann sogar, nach einem Satz von Whitehead, eine Homotopieäquivalenz). Ein Morphismus simplizialer Mengen heißt *Faserung*, wenn er die linke Liftungseigenschaft bezüglich aller Abbildungen $\Lambda_k^n \hookrightarrow \Delta^n$ hat. Ein Morphismus simplizialer Mengen heißt *Kofaserung*, wenn er bezüglich aller schwacher Äquivalenzen, die Faserungen sind, die rechte Liftungseigenschaft hat. Die so definierte Modellstruktur heißt *Kan-Modellstruktur*.

Das ist [Hir03, Definition 7.10.8, S. 135]. Eigentlich ist es aber ein wichtiger *Satz*, dass dadurch tatsächlich eine Modellstruktur definiert ist - hierzu muss man vor allem funktorielle fibrante und kofibrante Ersetzungen konstruieren. Wir werden diesen Satz hier lediglich verwenden und verweisen dazu abermals auf [Hir03].

Definition 5.21. Wir schreiben für die Morphismen zwischen simplizialen Objekten $X_\bullet, Y_\bullet$ in der Homotopiekategorie auch $\mathcal{H}o(X_\bullet, Y_\bullet)$ und für punktierte simpliziale Objekte $(X_\bullet, *)$, $(Y_\bullet, *)$ notieren wir die Morphismen in der punktierten Homotopiekategorie mit $[X_\bullet, Y_\bullet]$.

Satz 5.22. *Suspension und Schleifenraum induzieren Funktoren auf der Homotopiekategorie punktierter simplizialer Mengen sodass für fibrantes $X_\bullet$ und kofibrantes $Y_\bullet$ gilt:*

$$[\Sigma X_\bullet, Y_\bullet] \simeq [X_\bullet, \Omega Y_\bullet].$$

Die Aussage folgt aus $\mathcal{H}o(X_\bullet \times \Delta^1, Y_\bullet) \simeq \mathcal{H}o(X_\bullet, PY_\bullet)$, was wiederum aus der elementaren Adjunktion

$$\text{Hom}(X_\bullet \times Z, Y_\bullet) \simeq \text{Hom}(X_\bullet, \text{Hom}(Z, Y_\bullet))$$

für Mengen folgt. ◇

Definition 5.23. Sei $X_\bullet$ eine simpliziale Menge mit Basispunkt $*$. Wenn $X_\bullet$ fibrant ist, (man sagt auch, $X_\bullet$ ist ein *Kan-Komplex*), so definieren wir die *n-te Homotopiegruppe* als

$$\pi_n(X_\bullet, *) := [S^n, X_\bullet].$$

Ist $X_\bullet$ nicht fibrant, so definieren wir $\pi_n(X_\bullet, *) := \pi_n(\tilde{X}_\bullet, *)$, wobei $\tilde{X}_\bullet$ eine fibrante Ersetzung von $X_\bullet$ ist, d.h. $\tilde{X}_\bullet$ ist fibrant und es gibt eine schwache Äquivalenz $X_\bullet \rightarrow \tilde{X}_\bullet$.

Bemerkung 5.24. Da in Modellkategorien die fibrante Ersetzung funktoriell ist und $[S^n, \cdot]$ ein Hom-Funktor ist, sind auch Homotopiegruppen funktoriell.

Definition 5.25. Sei $(X_\bullet, *)$ simpliziale Menge mit Basispunkt. Dann heißt $X_\bullet$ *n-zusammenhängend*, wenn $\pi_k(X_\bullet, *) = 0$ für alle $k \leq n$ ist. Wir sagen auch *zusammenhängend* anstelle von 0-zusammenhängend.

Lemma 5.26. *Es ist $\pi_n(\Omega X_\bullet, *) \simeq \pi_{n+1}(X_\bullet, *)$ und somit auch*

$$\pi_0(\Omega^n X_\bullet, *) \simeq \pi_n(X_\bullet, *)$$

für $X_\bullet$ eine simpliziale Menge mit Basispunkt $$.*

Das folgt direkt aus der Definition von π_n und der Adjunktion von Suspension und Schleifenraum in Satz 5.22. $\diamond$

Definition 5.27. Sei $(X_\bullet, *)$ eine fibrante punktierte simpliziale Menge. Seien $\alpha, \beta \in X_1$ Simplizes. Dann heißen α und β *frei homotop*, wenn es eine *Homotopie* gibt, d.h. einen Simplex $\tau \in X_2$ mit $d_0\tau = \alpha$ und $d_1\tau = \beta$. Weiter heißen α und β *homotop (relativ Basispunkt)*, wenn es eine Homotopie $\tau \in X_2$ gibt mit $d_2\tau = s_0*$, wir notieren dann $\alpha \approx \beta$.

5.3. Simpliziale Gruppen

Definition 5.28. Eine *simpliziale Gruppe* ist ein simpliziales Objekt in der Kategorie der Gruppen (äquivalent ein Gruppenobjekt in der Kategorie der simplizialen Mengen), also eine simpliziale Menge, deren Mengen von k -Simplizes jeweils eine Gruppenstruktur tragen, sodass die Strukturabbildungen d_i, s_j Gruppenhomomorphismen sind. Wir verstehen simpliziale Gruppen grundsätzlich als punktierte simpliziale Mengen, mit der Identität als Basispunkt. Als Modellstruktur verwenden wir stets die Kan-Modellstruktur, wie im vorigen Kapitel.

Es sei an folgendes Lemma über die Homotopietheorie simplizialer Gruppen erinnert:

Lemma 5.29 (Moore). *Simpliziale Gruppen sind fibrant (in der Kan-Modellstruktur).*

Dies ist [GJ99, Lemma I.3.4]. $\diamond$

Korollar 5.30. *Die 0-te Homotopiegruppe einer simplizialen Gruppe $G_\bullet$ mit neutralem Element und Basispunkt id lässt sich ausrechnen über Punkte, d.h. X_0 , modulo Wege, d.h. X_1 :*

$$\pi_0(G_\bullet, \text{id}) = \frac{\{g \in G_0\}}{\{d_0\alpha \sim d_1\alpha \mid \alpha \in G_1\}}.$$

Korollar 5.31. *Die Fundamentalgruppe einer simplizialen Gruppe $G_\bullet$ mit neutralem Element und Basispunkt id lässt sich ausrechnen über Schleifen, d.h. $\Omega G_\bullet$, modulo Homotopien relativ Basispunkt:*

$$\pi_1(G_\bullet, \text{id}) = \frac{\{\alpha \in G_1 \mid d_0\alpha = d_1\alpha = \text{id}\}}{\{d_0\sigma \sim d_1\sigma \mid \sigma \in G_2 : d_2\sigma = s_0\text{id}\}}.$$

Für eine simpliziale Gruppe $G_\bullet$ (oder auch eine topologische Gruppe) gibt es zwei Operationen auf dem Schleifenraum $\Omega G_\bullet$, Hintereinanderausführung und punktweise Multiplikation. Dass diese in der Fundamentalgruppe übereinstimmen, zeigt eine kurze Rechnung mit dem folgenden Lemma, das wir später noch benötigen werden:

Lemma 5.32 (Eckmann-Hilton). *Sind auf einer Menge M zwei Monoidstrukturen $(M, \circ)$ und $(M, \bullet)$ gegeben, die übereinander distribuieren, d.h.*

$$(a \circ b) \bullet (c \circ d) = (a \bullet c) \circ (b \bullet d)$$

erfüllen, so stimmen $\circ$ und $\bullet$ überein und sind darüber hinaus kommutativ.

Dabei verstehen wir unter einem *Monoid* hier eine Menge mit assoziativer binärer Verknüpfung und Einselement für diese Verknüpfung.

Beweis. Seien $e_\circ$ und $e_\bullet$ die jeweiligen neutralen Elemente. Dann ist

$$e_\bullet = e_\bullet \bullet e_\bullet = (e_\circ \circ e_\bullet) \bullet (e_\bullet \circ e_\circ),$$

$$e_\circ = e_\circ \circ e_\circ = (e_\circ \bullet e_\bullet) \circ (e_\bullet \bullet e_\circ)$$

und die beiden rechten Seiten sind nach der Voraussetzung an die zwei Monoidstrukturen gleich, wir sprechen also nur noch von $e = e_\bullet = e_\circ$. Nun sieht man, abermals mit der Voraussetzung:

$$a \circ b = (a \bullet e) \circ (e \bullet b) = (a \circ e) \bullet (e \circ b) = a \bullet b,$$

die beiden Operationen $\circ$ und $\bullet$ sind also identisch.

Damit distribuiert $\circ$ über sich selbst, also gilt

$$a \circ b = (e \circ a) \circ (b \circ e) = (e \circ b) \circ (a \circ e) = b \circ a. \quad \square$$

Das Argument geht auf [EH62, Theorem 4.17, S. 244] zurück. Damit zeigt man z.B., dass alle Homotopiegruppen $\pi_n(X_\bullet, *)$ für $n > 1$ abelsch sind, indem man zeigt, dass $\pi_n(\Omega X_\bullet, *)$ für $n \geq 1$ stets abelsch ist - wie etwa in [GJ99, Lemma 7.6].

5.4. Fasersequenzen

In diesem Abschnitt wollen wir kurz den Formalismus von Fasersequenzen einführen, da sich damit die Resultate in den folgenden Kapiteln übersichtlicher einordnen lassen.

Definition 5.33. Sei $\varphi : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$ eine Kan-Faserung von simplizialen Mengen (also eine Faserung in der Kan-Modellkategorie). Dann heißt φ *simpliziale Überlagerung*,

wenn die Faser $\varphi^{-1}(e)$ über dem Basispunkt $e \in H_0$ diskret, also simplizial konstant ist. Sind $G_\bullet$ und $H_\bullet$ simpliziale Gruppen, so ist diese Faser der Kern von φ und trägt eine natürliche Gruppenstruktur.

Definition 5.34. Eine Überlagerung $f : Y_\bullet \rightarrow X_\bullet$ heißt *universelle Überlagerung*, wenn $Y_\bullet$ eine 1-zusammenhängende simpliziale Menge ist.

Definition 5.35. Sei $f : Y_\bullet \rightarrow X_\bullet$ ein den Basispunkt erhaltender simplizialer Morphismus von simplizialen Mengen mit Basispunkt. Wenn f eine Überlagerung ist mit Faser $F_\bullet := f^{-1}(*)$ über dem Basispunkt, so definieren wir einen simplizialen Morphismus

$$L : \Omega X_\bullet \rightarrow F_\bullet$$

Eine Schleife $\omega \in \Omega X_\bullet$ lässt sich liften nach $\tilde{\omega} \in PY_\bullet$, da f Faserung einer Modellkategorie, sogar eindeutig bis auf Homotopie. Unter dem Morphismus $PY_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ wird $\tilde{\omega}$ auf einen Simplex abgebildet, der in der Faser von f liegt. Da die Faser diskret ist, ist das Element nicht nur bis auf Homotopie eindeutig definiert, also ist so ein simplizialer Morphismus erklärt, den wir *Liftungsabbildung* L nennen.

Lemma 5.36. Ist $f : \tilde{G}_\bullet \rightarrow G_\bullet$ ein Morphismus simplizialer Gruppen, so ist $L : \Omega G_\bullet \rightarrow F_\bullet$ ein Gruppenhomomorphismus, wenn wir $\Omega G_\bullet$ mit der durch $G_\bullet$ induzierten und $F_\bullet$ mit der durch $\tilde{G}_\bullet$ induzierten Gruppenstruktur versehen.

Beweis. Seien $\omega, \omega' \in \Omega G_\bullet$ und $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}' \in P\tilde{G}_\bullet$ Lifts. Dann ist $\tilde{\omega}\tilde{\omega}'$ ein Lift von $\omega\omega'$ und damit stimmen $L(\omega)L(\omega')$ und $L(\omega\omega')$ in F überein. $\square$

Definition 5.37. Ist $f : Y_\bullet \rightarrow X_\bullet$ eine Überlagerung von simplizialen Mengen mit Basispunkt, so definieren wir einen Morphismus

$$\Omega f : \Omega Y_\bullet \rightarrow \Omega X_\bullet$$

durch die universelle Eigenschaft des Faserprodukts über die Abbildung $f \circ : PY_\bullet \rightarrow PX_\bullet$. Damit lässt sich f “vervollständigen” zur *Fasersequenz*

$$\cdots \rightarrow \Omega F_\bullet \rightarrow \Omega Y_\bullet \xrightarrow{\Omega f} \Omega X_\bullet \xrightarrow{L} F_\bullet \rightarrow Y_\bullet \xrightarrow{f} X_\bullet$$

wobei $F_\bullet$ die Faser von f über dem Basispunkt von $X_\bullet$ bezeichnet.

Lemma 5.38. Ist $f : \tilde{G}_\bullet \rightarrow G_\bullet$ eine Überlagerung von zusammenhängenden simplizialen Gruppen, so liefert der Funktor π_0 auf der Fasersequenz eine exakte Sequenz von Gruppen

$$0 \rightarrow \pi_1(\tilde{G}_\bullet, \text{id}) \rightarrow \pi_1(G_\bullet, \text{id}) \rightarrow F_0 \rightarrow 0$$

Beweis. Anwenden von π_0 auf die Fasersequenz liefert zunächst

$$\cdots \rightarrow \pi_1(F_\bullet, \text{id}) \rightarrow \pi_1(\tilde{G}_\bullet, \text{id}) \rightarrow \pi_1(G_\bullet, \text{id}) \rightarrow \pi_0(F_\bullet, \text{id}) \rightarrow \pi_0(\tilde{G}_\bullet, \text{id}) \rightarrow \pi_0(G_\bullet, \text{id})$$

Allerdings ist f eine Überlagerung, also $F_\bullet$ diskret, damit ist $\pi_1(F_\bullet, \text{id})$ trivial. Weiterhin sind $G_\bullet$ und $\tilde{G}_\bullet$ zusammenhängend, also $\pi_0(G_\bullet, \text{id})$ und $\pi_0(\tilde{G}_\bullet, \text{id})$ trivial. Zuletzt ist noch zu bemerken, dass unter der Adjunktion zwischen Suspension und Schleifenraum der Morphismus $\pi_1(f)$ genau dem Morphismus $\pi_0(\Omega f)$ entspricht. $\square$

Lemma 5.39. *Ist $G_\bullet$ eine zusammenhängende simpliziale Gruppe, so existiert eine universelle Überlagerung $\tilde{G}_\bullet$ und diese trägt eine Gruppenstruktur, sodass die Überlagerungsabbildung ein Gruppenhomomorphismus ist.*

Beweis. Man erhält dies aus der klassischen Überlagerungstheorie, indem man die geometrische Realisierung von $G_\bullet$ betrachtet, von diesem CW-Komplex die universelle Überlagerung und anschließende (klassische) singuläre Auflösung, wie in Definition 5.18 und Bemerkung 5.19. Eleganter ist der Zugang von [GJ99, S. 191], wobei bei beiden Zugängen noch zu zeigen ist, dass es eine kanonische Gruppenstruktur auf der universellen Überlagerung gibt. Wir werden daher eine explizite Konstruktion in der Kategorie der simplizialen Gruppen betrachten:

Sei $N_\bullet$ der Kern des Projektionshomomorphismus $\Omega G_\bullet \rightarrow \pi_1(G_\bullet, \text{id})$, das ist der Normalteiler der nullhomotopen Schleifen. Der Gruppenhomomorphismus $\Omega G_\bullet \hookrightarrow PG_\bullet$, verknüpft mit der Inklusion $N_\bullet \hookrightarrow \Omega G_\bullet$ liefert einen Monomorphismus $N_\bullet \hookrightarrow PG_\bullet$, dessen Kokern wir mit $\tilde{G}_\bullet$ bezeichnen. Da $\pi_1(G_\bullet, \text{id})$ der Kokern von $N_\bullet \hookrightarrow \Omega_\bullet$ ist, gibt es einen Homomorphismus $\pi_1(G_\bullet, \text{id}) \hookrightarrow \tilde{G}_\bullet$, der mit dem Homomorphismus $\Omega G_\bullet \hookrightarrow PG_\bullet$ kommutiert. Wir betrachten nun das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} N_\bullet & \hookrightarrow & \Omega G_\bullet & \twoheadrightarrow & \pi_1(G_\bullet, \text{id}) \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ N_\bullet & \hookrightarrow & PG_\bullet & \twoheadrightarrow & \tilde{G}_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & G_\bullet & \xrightarrow{\text{id}} & G_\bullet \end{array}$$

in dem die Zeilen exakt sind nach Konstruktion von $N_\bullet$ und $\tilde{G}_\bullet$. Die linke Spalte ist trivialerweise exakt, die mittlere Spalte ist exakt nach Definition des Schleifenraums als Kern der Projektion $PG_\bullet \twoheadrightarrow G_\bullet$. Damit ist auch die rechte Spalte exakt, nach einer einfachen Diagrammjagd (Spezialfall des 9er-Lemmas). Also haben wir bewiesen, dass $\tilde{G}_\bullet \rightarrow G_\bullet$ (nach Konstruktion eine Faserung mit diskreter Faser) Kern $\pi_1(G, \text{id})$ hat. Die zugehörige Fasersequenz liefert in den unteren Termen eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \pi_1(\tilde{G}_\bullet, \text{id}) \rightarrow \pi_1(G_\bullet, \text{id}) \rightarrow \pi_1(G_\bullet, \text{id}) \rightarrow \pi_0(\tilde{G}_\bullet) \rightarrow 0$$

in der der mittlere Pfeil $\pi_1(G_\bullet, \text{id}) \rightarrow \pi_1(G_\bullet, \text{id})$ ein Isomorphismus ist, also sind $\pi_1(\tilde{G}_\bullet, \text{id})$ und $\pi_0(\tilde{G}_\bullet)$ trivial. $\square$

Bemerkung 5.40. Aus der Fasersequenz für eine universelle Überlagerung $\tilde{G}_\bullet \twoheadrightarrow G_\bullet$ können wir nun außerdem noch für alle $n \geq 2$ exakte Sequenzen

$$0 \rightarrow \pi_n(\tilde{G}_\bullet, \text{id}) \rightarrow \pi_n(G_\bullet, \text{id}) \rightarrow 0$$

ablesen, die zeigen, dass die n -ten Homotopiegruppen von $\tilde{G}_\bullet$ und $G_\bullet$ für $n \geq 2$ übereinstimmen.

Lemma 5.41. *Ist $\tilde{G}_\bullet \rightarrow G_\bullet$ eine universelle Überlagerung und $G'_\bullet \twoheadrightarrow G_\bullet$ eine Überlagerung, so gibt es einen Epimorphismus $\tilde{G}_\bullet \twoheadrightarrow G'_\bullet$, der mit den Morphismen nach $G_\bullet$ kommutiert.*

Beweis. Aus der Fasersequenz für $G'_\bullet \twoheadrightarrow G_\bullet$ erhalten wir einen Epimorphismus $\pi_1(G_\bullet, \text{id}) \twoheadrightarrow F$, wenn F die Faser von $G'_\bullet$ über $*$ bezeichnet. Der Kern dieses Epimorphismus ist (wie man ebenfalls der Fasersequenz entnimmt) $\pi_1(G'_\bullet, \text{id})$. Damit können wir das kommutative Diagramm betrachten

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1(G'_\bullet, \text{id}) & \xrightarrow{\text{id}} & \pi_1(G'_\bullet, \text{id}) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_1(G_\bullet, \text{id}) & \hookrightarrow & \tilde{G}_\bullet & \longrightarrow & G_\bullet \\
 \downarrow & & \exists? \downarrow & & \downarrow \text{id} \\
 \frac{\pi_1(G'_\bullet, \text{id})}{\pi_1(G_\bullet, \text{id})} & \hookrightarrow & G'_\bullet & \longrightarrow & G_\bullet
 \end{array}$$

in dem die Zeilen exakt sind. Wir erhalten daraus

$$\frac{\tilde{G}_\bullet}{\pi_1(G_\bullet, \text{id})} \simeq G_\bullet \simeq \frac{G'_\bullet}{\left(\frac{\pi_1(G_\bullet, \text{id})}{\pi_1(G'_\bullet, \text{id})} \right)}$$

und mit einem Noetherschen Isomorphiesatz ist also $\tilde{G}_\bullet / \pi_1(G'_\bullet, \text{id}) \simeq G'_\bullet$, was den gesuchten Epimorphismus liefert. $\square$

6. Singuläre Auflösung von Chevalley-Gruppen

In diesem Kapitel werden wir die singuläre Auflösung einer einfach zusammenhängenden Chevalley-Gruppe $\mathbb{G}(\Phi)$ (Abschnitt 6.1) und ihrer Steinberg-Gruppe $\text{St}(\Phi)$ (Abschnitt 6.2) untersuchen. Unter der Regularitätsvoraussetzung Vermutung 6.22 aus Abschnitt 6.3 ist die singuläre Auflösung von $\text{St}(\Phi, k) \twoheadrightarrow \mathbb{G}(\Phi, k)$ eine simpliziale Überlagerung, von der wir zeigen, dass es sich um die universelle Überlagerung handelt und dass daher der Kern des Überlagerungshomomorphismus über den Liftungshomomorphismus isomorph zum punktierten Schleifenraum der singulären Auflösung von $\mathbb{G}(\Phi, k)$ ist.

Dann konstruieren wir in Analogie zum Lemma von Whitehead (Abschnitt 6.4) in Abschnitt 6.5 ein System von Pfaden $H_t^\alpha(s)$ von der Identität in $\mathbb{G}(\Phi, k)$ zu Toruselementen $h_\alpha(s)$ für $s \in k^\times$, welches erlaubt, Produkte dieser $H_t^\alpha(s)$ zu bilden, welche Schleifen sind. Wir rechnen in Abschnitt 6.6 Eigenschaften der somit explizit definierten Schleifen nach.

In Abschnitt 6.7 definieren wir unter Zuhilfenahme der Matsumoto-Präsentation einen Homomorphismus von der zweiten K-Theorie in den punktierten Schleifenraum der singulären Auflösung von $\mathbb{G}(\Phi, k)$ und zeigen, dass dies ein Isomorphismus auf die Fundamentalgruppe ist, indem wir zeigen, dass diese Abbildung invers zum Liftungsisomorphismus ist.

6.1. Singuläre Auflösung von algebraischen Gruppen

Wir werden nun einen Funktor $\text{Sing}_\bullet^{\mathbb{A}^1}$ definieren, der jeder linear algebraischen Gruppe eine simpliziale Gruppe zuordnet, deren Homotopietheorie wir danach untersuchen wollen. Tatsächlich definieren wir $\text{Sing}_\bullet^{\mathbb{A}^1}$ nicht nur für beliebige k -Schemata sondern für Prägarben auf k -Schemata, da dies keine zusätzliche Mühe bereitet.

Definition 6.1. Sei das simpliziale Objekt $\mathbb{Z}[\tilde{\Delta}^\bullet]$ in den kommutativen Ringen mit 1 gegeben durch

$$\mathbb{Z}[\tilde{\Delta}^n] := \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n] / \left(\sum_{i=0}^n t_i - 1 \right)$$

mit den Randabbildungen

$$d_i : \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n] / \left(\sum_{j=0}^n t_j - 1 \right) \rightarrow \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_{n-1}] / \left(\sum_{j=0}^{n-1} t_j - 1 \right), \quad t_j \mapsto \begin{cases} t_j & j < i, \\ 0 & j = i, \\ t_{j-1} & j > i \end{cases}$$

und den Entartungsabbildungen

$$s_j : \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n] / \left(\sum_{i=0}^n t_i - 1 \right) \rightarrow \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_{n+1}] / \left(\sum_{i=0}^{n+1} t_i - 1 \right), \quad t_i \mapsto \begin{cases} t_i & i < j, \\ t_i + t_{i+1} & i = j, \\ t_{i+1} & i > j. \end{cases}$$

6. Singuläre Auflösung von Chevalley-Gruppen

Diese Konstruktion findet sich z.B. bei Jardine [Jar83] und wird heutzutage häufig *Suslin-Voevodsky-Konstruktion* genannt.

Lemma 6.2. *Es gibt für $n \in \mathbb{N}$ einen (nicht-kanonischen) Isomorphismus von Ringen*

$$\mathbb{Z}[\tilde{\Delta}^n] = \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n] / \left(\sum_{i=0}^n t_i - 1 \right) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] =: \mathbb{Z}[\Delta^n]$$

$$t_i \mapsto \begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^n x_i & i = 0, \\ x_i & i > 0, \end{cases}$$

der einen simplizialen Ring $\mathbb{Z}[\Delta^\bullet]$ definiert. Der inverse Morphismus ist gegeben durch lineare Fortsetzung von $x_i \mapsto t_i$.

Die angegebene Abbildung auf Erzeugern erfüllt die Relationen in der linken Seite und die Umkehrabbildung ist offensichtlich. Die Rand- und Entartungen werden durch Konjugation mit dem Isomorphismus gebildet und erfüllen somit die simplizialen Identitäten. ◇

Definition 6.3. Für einen perfekten Körper k sei das kosimpliziale Objekt $\Delta_k^\bullet$ in $\mathbf{Sm}/k$ durch

$$\Delta_k^n := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\Delta^n] \otimes_{\mathbb{Z}} k)$$

mit den induzierten Korand- und Koentartungsabbildungen definiert.

Bemerkung 6.4. Das Objekt Δ_k^n ist die algebraische Version des topologischen Standardsimplex. Während der topologische Standardsimplex beschränkt ist, lässt sich dies algebraisch nicht bewerkstelligen, da die Ungleichung $x_i \geq 0$ in der Definition des topologischen Standardsimplex nicht ohne Weiteres algebraisch auszudrücken ist. Das hindert uns jedoch nicht daran, mit dem Objekt Δ_k^n intuitiv so zu arbeiten, als handle es sich um den Standardsimplex.

Beispiel 6.5. Die Randabbildung $d_0 : \mathbb{Z}[t, s] \rightarrow \mathbb{Z}[t]$ ist gegeben durch

$$\mathbb{Z}[t, s] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[t_0, t_1, t_2] / (t_0 + t_1 + t_2 - 1) \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z}[t_0, t_1] / (t_0 + t_1 - 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[t],$$

wobei also $f(t, s) \in \mathbb{Z}[t, s]$ über den Isomorphismus auf $f(t_1, t_2)$, von der Randabbildung d_0 auf $f(t_0, t_1)$ und vom Isomorphismus auf $f(1 - t, t) \in \mathbb{Z}[t]$ abgebildet wird.

Die Randabbildung $d_1 : \mathbb{Z}[t, s] \rightarrow \mathbb{Z}[t]$ bildet $f(t, s)$ auf $f(0, t)$ ab, die Randabbildung $d_2 : \mathbb{Z}[t, s] \rightarrow \mathbb{Z}[t]$ bildet $f(t, s)$ auf $f(t, 0)$ ab.

Die Entartungsabbildung $s_0 : \mathbb{Z}[t] \rightarrow \mathbb{Z}[t, s]$ bildet $f(t)$ auf $f(s)$ ab.

Wir bezeichnen mit $\mathbf{Sm}/k$ die Kategorie der glatten Schemata über k und mit $\mathbf{PShv}(\mathbf{Sm}/k)$ die Kategorie mengenwertiger Prägarben auf $\mathbf{Sm}/k$. Für eine k -Varietät X ist z.B. auch $X \in \mathbf{Sm}/k$ und für jedes $X \in \mathbf{Sm}/k$ ist $\mathrm{Hom}(\cdot, X) \in \mathbf{PShv}(\mathbf{Sm}/k)$.

Definition 6.6. Sei der Funktor $\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} : \text{PShv}(\text{Sm}/k) \rightarrow \Delta^{\text{op}} \text{PShv}(\text{Sm}/k)$ definiert durch

$$\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1}(F) : U \mapsto F(\Delta_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \times U).$$

Das Objekt $\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1}(F)$ heißt *singulärer Komplex* von F und $\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1}(F)(U)$ sind simpliziale Objekte mit den induzierten Rand- und Entartungsabbildungen.

Für eine k -Varietät X definieren wir $\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1}(X) := \text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1}(\text{Hom}(\cdot, X))$.

Bemerkung 6.7. Morel und Voevodsky haben die Theorie allgemein für einen Situs mit Intervall definiert und dann auf den Nisnevich-Situs mit $\mathbb{A}^1$ als Intervall spezialisiert. Dabei verwenden sie eine andere Definition von $\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1}$, um den Funktor auch auf simpliziale Prägarben anwenden zu können - was für simplizial konstante simpliziale Prägarben aber mit der hier gegebenen Definition übereinstimmt. Auch das Objekt $\Delta^{\bullet}$ ist bei Morel und Voevodsky anders definiert, jedoch ist es über der Basis k mit dem hier definierten Objekt äquivalent.

Proposition 6.8. Sei $\mathbb{G}$ eine linear algebraische Gruppe und R ein kommutativer Ring mit 1. Eine explizite Beschreibung von $\pi_1(\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{G})(R), \text{Id})$ ist durch Elemente von $\mathbb{G}(R[t])$ und $\mathbb{G}(R[t, s])$ gegeben:

$$\pi_1(\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{G})(R), \text{Id}) = \frac{\{M \in \mathbb{G}(R[t]) \mid M(0) = M(1) = \text{Id}\}}{\{N(1-t, t) \sim N(0, t) \mid N \in \mathbb{G}(R[t, s]) : N(t, 0) = \text{Id}\}}.$$

Beweis. Nach dem Lemma von Moore (bzw. Korollar 5.31) müssen wir nur d_0, d_1, d_2 und s_0 von $\mathbb{G}(R[\Delta^{\bullet}])$ im simplizialen Grad 2 und d_0, d_1 im simplizialen Grad 1 berechnen. Dies folgt aus der Beschreibung in Beispiel 6.5. Es ist für $N(t, s) \in \mathbb{G}(R[t, s])$ und $M(t) \in \mathbb{G}(R[t])$ nämlich

$$\begin{aligned} d_0 N(t, s) &= (N \circ d_0)(t, s) = N(1-t, t), \\ d_1 N(t, s) &= (N \circ d_1)(t, s) = N(0, t), \\ d_2 N(t, s) &= (N \circ d_2)(t, s) = N(t, 0), \\ s_0 M(t) &= (M \circ s_0)(t) = M(t), \\ d_0 M(t) &= (M \circ d_0)(t) = M(1), \\ d_1 M(t) &= (M \circ d_1)(t) = M(0). \end{aligned}$$

□

Es ist diese Beschreibung der Fundamentalgruppe einer linear algebraischen Gruppe, die wir im Folgenden verwenden werden. An dieser Stelle wollen wir nochmals davor warnen, diese Fundamentalgruppe mit der étalen Fundamentalgruppe zu verwechseln!

Wir beobachten außerdem noch:

Proposition 6.9. Sei $\mathbb{G}$ eine einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe und R ein lokaler Ring. Dann ist $\pi_0(\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{G})(R), \text{Id}) = 0$.

Beweis. Nach Satz 3.30 ist $\mathbb{G}(R) = E(R)$, also wird die Gruppe $\mathbb{G}(R)$ von Erzeugern $x_{\alpha}(s)$ mit $s \in R$ erzeugt. Dann ist $M := x_{\alpha}(ts) \in \mathbb{G}(R[t])$ ein 1-Simplex von $\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{G})(R)$ mit $d_0(M) = x_{\alpha}(0) = \text{Id}$ und $d_1(M) = x_{\alpha}(s)$. Für beliebige Produkte der $x_{\alpha}(s)$ sind die entsprechenden Produkte der $x_{\alpha}(ts)$ Simplizes mit der entsprechenden Eigenschaft. Nach Korollar 5.30 folgt die Behauptung. □

6.2. Singuläre Auflösung der Steinberggruppe

Definition 6.10. Sei $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\Phi)$ eine einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe, k ein Körper und $\text{St}(\Phi, k)$ die entsprechende *Steinberggruppe* (aus Definition 3.31), also die universelle zentrale Erweiterung der k -rationalen Punkte von $\mathbb{G}$ nach Satz 3.32. Dann definieren wir die *simpliciale Steinberggruppe*

$$\text{St}_\bullet := \text{Sing}_\bullet^{\mathbb{A}^1} \text{St}(\Phi)(k) := \text{St}(\mathbb{G})(\Delta_k^\bullet)$$

wobei wir die Gruppe $\mathbb{G}$ nur dann in der Notation weglassen, wenn klar ist, welche Gruppe gemeint ist, oder wenn es unerheblich ist. Wir werden zur Präzisierung auch $\text{St}_\bullet(\Phi)$ notieren, wenn Φ das Wurzelsystem von $\mathbb{G}$ ist. Als Basispunkt wählen wir stets implizit $\text{Id} \in \text{St}_0 = \text{St}(\mathbb{G}(k))$.

Bemerkung 6.11. Zwar ist die Steinberggruppe zunächst nur eine abstrakte Gruppe, und insbesondere keine algebraische Gruppe, aber nach der Steinberg-Präsentation ist sie eine Prägarbe auf der Kategorie der affinen Schemata, d.h. man kann in die Erzeuger $\tilde{x}_\alpha$ der Steinberggruppe Elemente beliebiger Ringe einsetzen. Somit ist dann auch in Definition 6.10 eine simpliciale Gruppe $\text{St}_\bullet$ definiert. Diese ist nach Lemma 5.29 fibrant.

Lemma 6.12. Sei $\mathbb{G}$ eine einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe und $\text{St}_\bullet$ die simpliciale Steinberggruppe von $\mathbb{G}(k)$. Dann ist $\pi_0(\text{St}_\bullet) = 0$.

Beweis. Nach Konstruktion ist $\text{St}_0 = \text{St}(\mathbb{G}(k))$, wird also von den $\tilde{x}_\alpha(u)$ für $\alpha \in \Phi$ und $u \in k$ erzeugt. Der Weg $\tilde{X}_\alpha(u) := \tilde{x}_\alpha(tu)$ verbindet die Identität $\text{Id} = \tilde{x}_\alpha(0)$ mit $\tilde{x}_\alpha(u)$, also liegen alle Elemente von St_0 in der Zusammenhangskomponente des Basispunkts. $\square$

Definition 6.13. Sei $\mathbb{G}$ eine einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe, R ein Ring und $\text{St}_\bullet$ die simpliciale Steinberggruppe von $\mathbb{G}(R)$. Dann definieren wir für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $\alpha \in \Phi$ und alle $f \in R[t_1, \dots, t_n]$

$$\pi : \text{St}_n \rightarrow \mathbb{G}_n, \quad \tilde{x}_\alpha(f(t_1, \dots, t_n)) \mapsto x_\alpha(f(t_1, \dots, t_n)),$$

also einen simplicialen Epimorphismus $\pi : \text{St}_\bullet \rightarrow \mathbb{G}_\bullet$, der für einen Körper $R = k$ den Epimorphismus $\text{St}(\mathbb{G}(k)) \rightarrow \mathbb{G}(k)$ von Steinberg fortsetzt.

Bemerkung 6.14. Wenn Vermutung 3.35 korrekt ist, dann ist für $\text{rk } \Phi \geq 5$ und R lokaler Ring auch $\pi : \text{St}_n \rightarrow \mathbb{G}_n$ eine universelle perfekte zentrale Erweiterung, also

$$\text{K}_2(\Phi, R[\Delta^\bullet]) \hookrightarrow \text{St}_\bullet \rightarrow \mathbb{G}_\bullet$$

eine universelle perfekte zentrale Erweiterung von simplicialen Gruppen. Mit Satz 3.34 gilt dies in jedem Falle für $\Phi = A_n$ mit $n \geq 5$.

Um den Hauptsatz dieser Arbeit zu beweisen, ist die folgende triviale Aussage sehr hilfreich.

Proposition 6.15. *Sei R ein regulärer Ring und $\mathbb{G}$ eine einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe mit Wurzelsystem Φ von Rang ≥ 2 . Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$, für jedes $\tau \in \mathbb{G}(R[t_1, \dots, t_n])$ einen Lift $\tilde{\tau} \in \text{St}_\bullet$, der bis auf Multiplikation mit $K_2(\Phi, R[t_1, \dots, t_n])$ eindeutig ist.*

Beweis. Seien zwei Faktorisierungen

$$\prod_{i=1}^m x_{\alpha_i}(f_i(t_1, \dots, t_n)) = \tau = \prod_{j=1}^{m'} x_{\beta_j}(g_j(t_1, \dots, t_n))$$

mit $\alpha_i, \beta_j \in \Phi$ und $f_i, g_j \in R[t_1, \dots, t_n]$ gegeben. Nach Satz 3.27 gibt es stets solche Faktorisierungen. Wir definieren zwei Elemente von $\text{St}_\bullet$:

$$\tilde{\tau} := \prod_{i=1}^m \tilde{x}_{\alpha_i}(f_i(t_1, \dots, t_n)), \quad \tilde{\tau}' := \prod_{j=1}^{m'} \tilde{x}_{\beta_j}(g_j(t_1, \dots, t_n)),$$

die offensichtlich beide mit der Projektion $\text{St}_\bullet \rightarrow \mathbb{G}_\bullet$ auf τ abgebildet werden. Nach Konstruktion liegt $\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\tau}'$ in der Faser von Id , also

$$\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\tau}' \in \text{Ker}(\text{St}(\Phi, R[t_1, \dots, t_n]) \rightarrow \mathbb{G}(\Phi, R[t_1, \dots, t_n])) = K_2(\Phi, R[t_1, \dots, t_n]).$$

Num ist $\tilde{\tau}' \in \tilde{\tau} \cdot K_2(\Phi, R[t_1, \dots, t_n])$. □

6.3. Über Homotopieinvarianz instabiler K-Theorie

Definition 6.16. Sei Φ ein Wurzelsystem und R ein Ring. Dann sagen wir, $K_2(\Phi, \cdot)$ erfüllt *Homotopieinvarianz in i Variablen* für R , wenn

$$K_2(\Phi, R[t_1, \dots, t_i]) \simeq K_2(\Phi, R).$$

Wir sagen auch, R sei $K_2(\Phi, \cdot)$ -*regulär*, wenn $K_2(\Phi, R)$ Homotopieinvarianz in beliebig vielen Variablen erfüllt.

In Proposition 6.15 haben wir gesehen, dass dies eine wünschenswerte Eigenschaft ist.

Satz 6.17 (Quillen, Homotopieinvarianz für Quillen-K-Theorie). *Ist R ein regulärer Ring, dann ist $K_2(R[t_1, \dots, t_i]) \simeq K_2(R)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.*

Das ist [Qui73, Korollar zu Theorem 8, S.38]. ◇

Satz 6.18 (van der Kallen). *Ist R ein Ring mit $\dim \text{MaxSpec}(R) = d < \infty$, so ist $K_2(A_{n+d}, R) \simeq K_2(R)$ für alle $n \geq 3$.*

Das ist [Kal76, Theorem 1, S. 77]. ◇

Korollar 6.19. *Sei R ein Ring mit $\dim \text{MaxSpec}(R) = d < \infty$. Dann erfüllt $K_2(A_{n+d+j}, R)$ für alle $n \geq 3$ Homotopieinvarianz in j Variablen.*

6. Singuläre Auflösung von Chevalley-Gruppen

Beweis. Es ist $K_2(A_{n+d+j}, R[t_1, \dots, t_j]) \simeq K_2(R[t_1, \dots, t_j])$ nach dem Satz von van der Kallen und nach dem Satz von Quillen erfüllt die rechte Seite Homotopieinvarianz, also $K_2(R[t_1, \dots, t_j]) \simeq K_2(R)$, erneut mit dem Satz von van der Kallen $K_2(R) \simeq K_2(A_{n+d+j}, R)$ erhalten wir insgesamt

$$K_2(A_{n+d+j}, R[t_1, \dots, t_j]) \simeq K_2(A_{n+d+j}, R). \quad \square$$

Korollar 6.20. *Ist R ein lokaler Ring, so hat $K_2(A_{n+j}, R)$ für alle $n \geq 3$ Homotopieinvarianz in j Variablen. Insbesondere erfüllt $K_2(A_n, R)$ für $n \geq 4$ Homotopieinvarianz in einer Variablen.*

Beweis. Für R lokal ist $d = \dim \text{MaxSpec}(R) = 0$. Körper sind lokale Ringe. $\square$

Bemerkung 6.21. Für einen Körper k und $n, i \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ ist

$$K_2(A_n, k[t_1, \dots, t_i]) \simeq K_2(A_n, k) \simeq K_2^M(k)$$

äquivalent dazu, dass $K_2(A_n, k[\Delta^\bullet])$ simplizial diskret ist.

Für gewisse andere (klassische) Wurzelsysteme als A_n lässt sich mit [Hor05, Corollary 1.12, S.7] zeigen, dass auch diese stabil Homotopieinvarianz erfüllen (mit einem ähnlichen Argument wie im Beweis des Satzes von Quillen). Um eine präzise Aussage über den Rang zu machen, ab dem Homotopieinvarianz erfüllt ist, muss man allerdings noch mehr arbeiten, was wir an dieser Stelle nicht tun können. Daher werden wir für den Rest der Arbeit eine sinnvolle Annahme machen:

Vermutung 6.22 (Wendt). *Für einen Körper k und Φ ein Wurzelsystem von Rang $n \geq 3$ erfüllt $K_2(\Phi, k)$ Homotopieinvarianz in beliebig vielen Variablen. Insbesondere ist also $K_2(\Phi, k[\Delta^\bullet])$ simplizial diskret, d.h.*

$$\pi_0(K_2(\Phi, k[\Delta^\bullet])) = K_2(\Phi, k) \simeq \begin{cases} K_2^{Sp}(k), & \Phi = C_n \\ K_2^M(k), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei haben wir die $\simeq$ der Vermutungen bereits bewiesen, denn dies ist der Satz von Matsumoto. Wir werden diese Vermutung im Folgenden mehrmals verwenden, dann allerdings nochmals gesondert darauf hinweisen. Die unter dieser Bedingung bewiesenen Sätze sind somit ohne Bedingung nur bewiesen für A_n mit $n \geq 4$.

Proposition 6.23. *Erfüllt $K_2(\Phi, k)$ Homotopieinvarianz in beliebig vielen Variablen, so ist die Abbildung*

$$\text{St}_\bullet(\Phi, k) \twoheadrightarrow \mathbb{G}(\Phi, k)$$

eine simpliziale Überlagerung von simplizialen Gruppen und damit insbesondere eine zentrale Erweiterung mit dem simplizial diskreten Kern $K_2(\Phi, k)$.

Beweis. Nach Definition 5.33 ist eine simpliziale Überlagerung eine Faserung mit diskreter Faser. Die Voraussetzung der Homotopieinvarianz ist genau die Diskretheit des Kerns. Da es sich um einen (simplizialen) Gruppenhomomorphismus handelt, ist die Faser über jedem Punkt isomorph zum Kern. Um nun die Liftungseigenschaft zur Definition von Kan-Faserungen einzusehen, wählen wir im Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda_k^n & \rightarrow & \text{St}_\bullet(\Phi, k) \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 \Delta^n & \rightarrow & \mathbb{G}_\bullet(\Phi, k)
 \end{array}$$

einen beliebigen Lift von $\Delta^n \rightarrow \mathbb{G}_\bullet(\Phi, k)$ nach $\text{St}_\bullet(\Phi, k)$ mit Hilfe von Proposition 6.15, dieser ist eindeutig bis auf Multiplikation mit $K_2(\Phi, k)$. Da $K_2(\Phi, k)$ diskret in $\text{St}_\bullet(\Phi, k)$ liegt, unterscheidet sich der beliebige Lift von dem auf Λ_k^n vorgegebenen auch nur um einen multiplikativen $K_2(\Phi, k)$ -Faktor. Damit lässt sich ein Lift wählen, der mit dem vorgegebenen übereinstimmt. $\square$

Lemma 6.24. *Wenn Φ ein Wurzelsystem und k ein Körper mit*

$$(\text{Regularität}) \quad K_2(\Phi, k[t]) \simeq K_2(\Phi, k),$$

ist, so ist die Fundamentalgruppe der singulären Ersetzung der Steinberggruppe trivial, d.h.

$$\pi_1(\text{St}_\bullet(\Phi, k), \text{Id}) = 0,$$

damit ist $\text{St}_\bullet(\Phi, k) \twoheadrightarrow \mathbb{G}_\bullet(\Phi, k)$ die universelle Überlagerung von $\mathbb{G}_\bullet(\Phi, k)$.

Beweis. Es gibt zu der simplizialen Gruppe $\mathbb{G}_\bullet$ eine universelle simpliziale Überlagerung $\widetilde{\mathbb{G}}_\bullet$. Diese trägt eine universelle Gruppenstruktur, sodass die Überlagerungsabbildung ein Gruppenhomomorphismus ist (induziert von $\mathbb{G}_\bullet$) und damit ist sie eine zentrale Erweiterung von $\mathbb{G}_\bullet$. Damit faktorisiert die universelle zentrale Erweiterung $\text{St}_\bullet \twoheadrightarrow \mathbb{G}_\bullet$ (per definitionem) als

$$\text{St}_\bullet \twoheadrightarrow \widetilde{\mathbb{G}}_\bullet \twoheadrightarrow \mathbb{G}_\bullet$$

und auf der Fundamentalgruppe liefert dies

$$\pi_1(\text{St}_\bullet, \text{Id}) \rightarrow \pi_1(\widetilde{\mathbb{G}}_\bullet, \text{Id}) \hookrightarrow \pi_1(\mathbb{G}_\bullet, \text{Id})$$

jedoch ist $\pi_1(\widetilde{\mathbb{G}}_\bullet, \text{Id}) = 0$, also auch das Bild von $\pi_1(\text{St}_\bullet, \text{Id})$ in $\pi_1(\mathbb{G}_\bullet, \text{Id})$. Der Ausschnitt aus der Fasersequenz

$$\Omega K_2(\Phi, k[\Delta^\bullet]) \rightarrow \Omega \text{St}_\bullet \rightarrow \Omega \mathbb{G}_\bullet$$

liefert unter π_0 wegen der Regularitätsannahme an K_2 eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \pi_1(\text{St}_\bullet, \text{Id}) \rightarrow \pi_1(\mathbb{G}_\bullet, \text{Id})$$

also ist $\pi_1(\text{St}_\bullet, \text{Id})$ auch injektiv in $\pi_1(\mathbb{G}_\bullet, \text{Id})$, damit isomorph zu ihrem Bild, der trivialen Untergruppe. $\square$

6.4. Whiteheads Lemma

Zur Motivation betrachten wir das folgende Lemma von Whitehead.

6. Singuläre Auflösung von Chevalley-Gruppen

Lemma 6.25 (Whitehead). *Sei R ein Ring mit 1 und $a, b \in R^\times$. Die Matrix $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R)$ lässt sich durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen (also Links- und Rechtsmultiplikation mit Elementarmatrizen) auf die Form $\begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bringen.*

Beweis. Mit jeweils einer Spaltenumformung (also Rechtsmultiplikation mit einer Elementarmatrix) $\rightsquigarrow$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & ab \\ 0 & b \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & ab \\ -1 & b \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & ab \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} ab & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um direkt zu sehen, um welche Elementarmatrizen es sich handelt, wollen wir nun Notation einführen.

$$\begin{aligned} x_+(a) &:= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ x_-(a) &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \\ w(a) &:= \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^{-1} & 0 \end{pmatrix} = x_+(a)x_-(-a^{-1})x_+(a), \\ h(a) &:= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = w(a)w(1)^{-1}. \end{aligned}$$

Mit dieser glücklich gewählten Notation sehen wir sofort:

$$h(a) = x_+(a)x_-(-a^{-1})x_+(a-1)x_-(1)x_+(-1),$$

ein Produkt von Elementarmatrizen, und

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} h(b) = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Siehe dazu auch [Lam06, 1.§5].

Wir können diese Faktorisierung von $h(a)$ in Elementarmatrizen nutzen, um eine verwandte Aussage zu zeigen:

Lemma 6.26 (Whitehead'). *Es gibt eine Matrix $H(s, t) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[s, s^{-1}, t])$, die sich als Produkt von Elementarmatrizen schreiben lässt, sodass für jeden kommutativen Ring R mit 1 und jede Einheit $a \in R^\times$ gilt:*

$$H(a, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}, \quad H(a, 1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = h(a), \quad H(1, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}.$$

Beweis. Wir konstruieren $H(s, t)$ in $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}[s, s^{-1}, t])$:

$$H(s, t) := x_+(ts)x_-(-ts^{-1})x_+(t(s-1))x_-(t)x_+(-t).$$

Für $t = 0$ und $a \in R^\times$ ergibt sich

$$H(a, 0) = x_+(0)x_-(0)x_+(0)x_-(0)x_+(0) = \text{Id}.$$

Für $t = 1$ und $a \in R^\times$ ergibt sich

$$H(a, 1) = x_+(a)x_-(-a^{-1})x_+(a-1)x_-(1)x_+(-1) = h(a).$$

Zuletzt wollen wir für $s = 1$ und t beliebig berechnen

$$H(1, t) = x_+(t)x_-(-t)x_+(0)x_-(t)x_+(-t) = x_+(t)x_-(0)x_+(-t) = \text{Id}. \quad \square$$

Beispiel 6.27. Für einen Ring R und $s \in R^\times$ sieht die Matrix $H_t(s) := H(s, t) \in \text{SL}_2(R[t])$ konkret so aus:

$$H_t(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(1-s)t}{s} \begin{pmatrix} (t^2-2)ts & -(t^2-2)(t^2-1)s \\ t^2-1 & -(t^2-2)t \end{pmatrix}.$$

Dabei lassen sich die Faktoren $(1-s)$ und t leicht erklären, haben wir doch für $s = 1$ sowie $t = 0$ gefordert, dass $H(s, t) = \text{Id}$ ist.

Korollar 6.28. Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Die elementare Untergruppe $E(R) := \varinjlim_n E_n(R)$ (die von Elementarmatrizen erzeugt wird) in $\text{GL}(R) = \varinjlim_n \text{GL}_n(R)$ ist die Kommutatorgruppe, d.h.

$$[\text{GL}(R), \text{GL}(R)] = E(R).$$

Beweis. In GL lassen sich zwei Matrizen A, B vertauschen, indem man durch Multiplikation mit Elementarmatrizen die Matrix

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix} = (AB \oplus \text{Id})$$

auf die Form

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = (A \oplus \text{Id}) \cdot (\text{Id} \oplus B) = (\text{Id} \oplus B) \cdot (A \oplus \text{Id})$$

bringt. Dazu setzt man im Lemma von Whitehead für R den Matrizenring $\text{GL}_n(R)$ ein, für n größer gleich der Summe der Größen von A und B . Zuletzt lässt sich mit der selben Methode $(B \oplus \text{Id})$ auf die Form $(\text{Id} \oplus B)$ bringen, damit schließlich

$$(AB \oplus \text{Id}) \sim (\text{Id} \oplus B) \cdot (A \oplus \text{Id}) \sim (B \oplus \text{Id}) \cdot (A \oplus \text{Id}) = (BA \oplus \text{Id}). \quad \square$$

6.5. Ausgezeichnete Schleifen

Sei für den Rest der Arbeit $\mathbb{G}$ eine einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe mit gewähltem Torus H , Wurzelsystem Φ , einfachen Wurzeln Δ und Erzeugern x_α . Die universelle zentrale Erweiterung der elementaren Untergruppe von $\mathbb{G}(k)$ bezeichnen

6. Singuläre Auflösung von Chevalley-Gruppen

wir im Folgenden mit $\text{St}(\mathbb{G})$ und verwenden, dass es sich um die Steinberggruppe $\text{St}(\Phi)$ handelt. Wir notieren wieder abkürzend $\mathbb{G}_\bullet := \text{Sing}_\bullet^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}(k)$ und $\text{St}_\bullet := \text{Sing}_\bullet^{\mathbb{A}^1} \text{St}(k)$ für die singuläre Auflösung von $\mathbb{G}$ bzw. ihrer Steinberggruppe, also z.B. $G_0 = \mathbb{G}(k)$ und $G_1 = \mathbb{G}(k[t])$.

Definition 6.29. Sei $h = h_\alpha : \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}$ für ein $\alpha \in \Phi$. Ein Element $H_t(s) \in \mathbb{G}(R[s, s^{-1}, t])$, welches für alle $a \in R^\times$ die Eigenschaften

$$H_0(a) = \text{Id}, \quad H_1(a) = h(a), \quad H_t(1) = \text{Id}$$

hat, wollen wir einen *guten Weg* (zu $h(a)$) in $\mathbb{G}_\bullet$ nennen.

Für $x, y \in R^\times$ wollen wir die Elemente $C_t(x, y) \in \mathbb{G}(R[t])$, welche durch

$$C_t(x, y) := H_t(x)H_t(y)H_t(xy)^{-1}$$

gegeben sind, *gute Schleifen* (zu $(x, y) \in \mathbb{G}_m(R) \times \mathbb{G}_m(R)$) in $\mathbb{G}_\bullet$ nennen.

Dass die Terminologie gerechtfertigt ist, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 6.30. *Gute Schleifen im Sinne von Definition 6.29 sind Schleifen, d.h.*

$$C_0(x, y) = C_1(x, y) = \text{Id}, \quad C_t(1, y) = C_t(x, 1) = \text{Id},$$

damit ist C_t ein Morphismus

$$\mathbb{G}_m(R) \wedge \mathbb{G}_m(R) \rightarrow \Omega \mathbb{G}_\bullet(R).$$

Beweis. Nach Definition von C_t und den Eigenschaften guter Wege erhalten wir

$$\begin{aligned} C_0(x, y) &= H_0(x)H_0(y)H_0(xy)^{-1} = \text{Id} \cdot \text{Id} \cdot \text{Id}^{-1} = \text{Id}, \\ C_1(x, y) &= H_1(x)H_1(y)H_1(xy)^{-1} = h(x)h(y)h(xy)^{-1} = h(xy)h(xy)^{-1} = \text{Id}, \\ C_t(x, 1) &= H_t(x)H_t(1)H_t(x)^{-1} = H_t(x) \cdot 1 \cdot H_t(x)^{-1} = \text{Id}, \\ C_t(1, y) &= H_t(1)H_t(y)H_t(y)^{-1} = \text{Id} \cdot H_t(y)H_t(y)^{-1} = \text{Id}. \end{aligned} \quad \square$$

Definition 6.31. Wir wählen für jedes $s \in k$ einen Weg, insgesamt einen Morphismus

$$X_t^\alpha : \mathbb{G}_a(k) \rightarrow \mathbb{G}_\alpha(k[t]), \quad X_t^\alpha(s) := x_\alpha(ts),$$

sodass die $X_t^\alpha(s)$ (für $t = 0$) $x_\alpha(0) = \text{Id}$ mit $x_\alpha(s)$ (für $t = 1$) verbinden. Weiterhin wählen wir Wege

$$W_t^\alpha(s) := X_t^\alpha(s)X_t^{-\alpha}(-s^{-1})X_t^\alpha(s),$$

die Id mit $w_\alpha(s)$ verbinden und schließlich sind

$$H_t^\alpha(s) := W_t^\alpha(s)W_t^\alpha(1)^{-1}$$

Wege, die Id mit $h_\alpha(s)$ verbinden.

Proposition 6.32. *Die Wege $H_t^\alpha(s)$ sind per definitionem gute Wege.* $\diamond$

Definition 6.33. Wir wollen von nun an die guten Wege $H_t^\alpha(s)$ *ausgezeichnete Wege* nennen und mit *ausgezeichneten Schleifen* $C_t^\alpha(x, y)$ stets gute Schleifen bezüglich ausgezeichneter Wege meinen, also

$$C_t^\alpha(x, y) := H_t^\alpha(x)H_t^\alpha(y)H_t^\alpha(xy)^{-1}.$$

Beispiel 6.34. Wenn wir in der Gruppe SL_2 , also im Wurzelsystem A_1 wie in Abschnitt A.3 die $x_\alpha(s)$ und die $H_t^\alpha(s)$ wie in Beispiel 6.27 berechnen, so ergibt sich für $C_t^\alpha(x, y)$ die Matrix

$$C_t^\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t(t^2 - 1) \frac{(1-x)(1-y)}{x^2y} D_t^\alpha(x, y)$$

$$\text{mit } D_t^\alpha(x, y) := \begin{pmatrix} xt(t^2 - 1)(t^2 - 2)(1 - x) & -yx^2(t^2 - 2)((t^2 - 1)^2(1 - x) + x) \\ (t^2 - 1)^2(1 - x) - 1 & -xyt(t^2 - 1)(t^2 - 2)(1 - x) \end{pmatrix},$$

an der man einige Eigenschaften der guten Schleifen direkt ablesen kann.

6.6. Relationen für ausgezeichnete Schleifen

Wie im vorigen Abschnitt bereits festgestellt, sind die ausgezeichneten Schleifen normiert.

Lemma 6.35. *Es ist $C_t^\alpha(x, 1) = \text{Id} = C_t^\alpha(1, y)$ für alle $x, y \in k^\times$.*

Beweis. Nach Definition von C_t^α ist dies bereits klar:

$$C_t^\alpha(x, 1) = H_t^\alpha(x)H_t^\alpha(1)H_t^\alpha(x)^{-1} = H_t^\alpha(x)H_t^\alpha(x)^{-1} = \text{Id},$$

$$C_t^\alpha(1, y) = H_t^\alpha(1)H_t^\alpha(y)H_t^\alpha(y)^{-1} = H_t^\alpha(y)H_t^\alpha(y)^{-1} = \text{Id}. \quad \square$$

Lemma 6.36 (Konjugationslemma). *Seien γ_t und G_t Wege in $\mathbb{G}$ mit $\gamma_1 = \text{Id}$ und $G_0 = \text{Id}$. Dann ist Konjugation mit γ_t auf G_t bis auf Homotopie relativ $t = 0$ trivial, d.h.*

$$\gamma_t G_t \gamma_t^{-1} \approx G_t.$$

Beweis. Die Homotopie ist gegeben durch

$$\gamma_{1-s} G_t \gamma_{1-s}^{-1},$$

denn für $s = 0$ ist dies G_t , für $s = 1 - t$ ist es $\gamma_t G_t \gamma_t^{-1}$ und für $t = 0$ ist es $\gamma_{1-s} \gamma_{1-s}^{-1} = \text{Id}$. $\square$

In Matsumotos Beweis wird oft verwendet, dass die Steinberg-Kozykel in einer zentralen Untergruppe der Erweiterung liegen. Ein homotopietheoretisches Analogon wird uns nützlich sein.

Korollar 6.37. *Die ausgezeichneten Schleifen $C_t^\alpha(x, y)$ für $x, y \in k^\times$ sind bis auf Homotopie relativ Id zentral in der von den X_t^β erzeugten Untergruppe von $\mathbb{G}_\bullet$, d.h.*

$$X_t^\beta(a) C_t^\alpha(x, y) X_t^\beta(a)^{-1} \approx C_t^\alpha(x, y).$$

6. Singuläre Auflösung von Chevalley-Gruppen

Beweis. Wir setzen in Lemma 6.36 für γ_t die Schleife $C_t^\alpha(x, y)$ ein, für G_t den Weg $X_t^\beta(a)$. Damit ist also

$$C_t^\alpha(x, y)X_t^\beta(a)C_t^\alpha(x, y)^{-1} \approx X_t^\beta(a). \quad \square$$

Wir benötigen eine homotopietheoretische Fassung von Lemma 4.4 (b).

Lemma 6.38. *Für $\alpha, \beta \in \Phi$ und $u, v \in k^\times$ ist*

$$W_t^\alpha(v)X_t^\beta(u)W_t^\alpha(v)^{-1} \approx X_t^{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta uv^{-\beta\alpha^*})$$

(homotop relativ $t = 0$).

Beweis. In $\mathbb{G}(k)$ ist nach Lemma 4.4 (b)

$$w_\alpha(v)x_\beta(u)w_\alpha(v)^{-1} = x_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta uv^{-\beta\alpha^*}).$$

Der Weg $W_t^\alpha(v)x_\beta(u)W_t^\alpha(v)^{-1}$ von $x_\beta(u)$ nach $w_\alpha(v)x_\beta(u)w_\alpha(v)^{-1}$ definiert eine Homotopie

$$W_s^\alpha(v)x_\beta(u)W_s^\alpha(v)^{-1}$$

zum konstanten Weg $x_\beta(u)$. Setzt man hier $u := tu'$ ein, für $u' \in k^\times$, so erhält man eine Homotopie

$$W_s^\alpha(v)X_t^\beta(u)W_s^\alpha(v)^{-1}$$

die für $s = 0$ den Weg $X_t^\beta(u)$ liefert, für $s = t$ hingegen den Weg $X_t^{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta uv^{-\beta\alpha^*})$. Für $t = 0$ ist die Homotopie offensichtlich konstant Id. $\square$

Analog zu den Rechenregeln in Lemma 4.13 (a), (b), (d) und (e) rechnen wir nun einige Eigenschaften von W_t^α nach.

Lemma 6.39. *Für $\alpha, \beta \in \Phi$ und $u, v \in k^\times$ gelten*

$$(a). \quad W_t^\alpha(v)W_t^\beta(u)W_t^\alpha(v)^{-1} \approx W_t^{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta uv^{-\beta\alpha^*}) \quad (\text{homotop relativ } t = 0).$$

$$(b). \quad H_t^\alpha(v)W_t^\beta(u)H_t^\alpha(v)^{-1} \approx W_t^\beta(uv^{\beta\alpha^*}) \quad (\text{homotop relativ } t = 0).$$

$$(c). \quad H_t^\alpha(v)H_t^\beta(u)H_t^\alpha(v)^{-1} \approx H_t^\beta(uv^{\beta\alpha^*})H_t^\beta(v^{\beta\alpha^*})^{-1} \quad (\text{homotop relativ } t = 0).$$

$$(d). \quad W_t^\alpha(v)H_t^\beta(u)W_t^\alpha(v)^{-1} \approx H_t^{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta v^{-\beta\alpha^*}u)H_t^{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta v^{-\beta\alpha^*})^{-1} \quad (\text{h.r. } t = 0).$$

wobei $\eta = \eta(\alpha, \beta)$ wie in Lemma 4.4.

Beweis. Wir rechnen mit Lemma 6.38:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & W_t^\alpha(v)W_t^\beta(u)W_t^\alpha(v)^{-1} \\
 (2) \quad & = W_t^\alpha(v)X_t^\beta(u)X_t^{-\beta}(-u^{-1})X_t^\beta(u)W_t^\alpha(v)^{-1} \\
 (3) \quad & = W_t^\alpha(v)X_t^\beta(u)W_t^\alpha(v)^{-1} W_t^\alpha(v)X_t^{-\beta}(-u^{-1})W_t^\alpha(v)^{-1} W_t^\alpha(v)X_t^\beta(u)W_t^\alpha(v)^{-1} \\
 (4) \quad & \approx X_t^{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta(\alpha, \beta)uv^{-\beta\alpha^*}) X_t^{\sigma_\alpha(-\beta)}(\eta(\alpha, -\beta)(-u^{-1})v^{-(-\beta)\alpha^*}) X_t^{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta(\alpha, \beta)uv^{-\beta\alpha^*}) \\
 (5) \quad & = X_t^{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta uv^{-\beta\alpha^*}) X_t^{-\sigma_\alpha(\beta)}(-(\eta uv^{-\beta\alpha^*})^{-1}) X_t^{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta uv^{-\beta\alpha^*}) \\
 (6) \quad & = W_t^{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta uv^{-\beta\alpha^*}).
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass $\eta(\alpha, \beta) = \eta(\alpha, -\beta) \in \{\pm 1\}$ und $(-\beta)\alpha^* = -\beta\alpha^*$ ist. Damit ist (a) gezeigt. Durch zweimaliges anwenden von (a) kommen wir auf (b):

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & H_t^\alpha(v)W_t^\beta(u)H_t^\alpha(v)^{-1} \\
 (8) \quad & = W_t^\alpha(v)W_t^\alpha(1)^{-1}W_t^\beta(u)W_t^\alpha(1)W_t^\alpha(v)^{-1} \\
 (9) \quad & = W_t^\alpha(v) W_t^\alpha(-1)W_t^\beta(u)W_t^\alpha(-1)^{-1} W_t^\alpha(v)^{-1} \\
 (10) \quad & \approx W_t^\alpha(v) W_t^{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta u(-1)^{-\beta\alpha^*}) W_t^\alpha(v)^{-1} \\
 (11) \quad & \approx W_t^{\sigma_\alpha^2(\beta)}(\eta(\alpha, \beta)\eta(\alpha, \sigma_\alpha(\beta))u(-1)^{-\beta\alpha^*} v^{-\sigma_\alpha(\beta)\alpha^*}) \\
 (12) \quad & = W_t^\beta(uv^{\beta\alpha^*}).
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der letzten Zeile benutzt, dass $-\sigma_\alpha(\beta)\alpha^* = \beta\alpha^*$ ist. Daraus folgt direkt Aussage (c):

$$\begin{aligned}
 (13) \quad & H_t^\alpha(v)H_t^\beta(u)H_t^\alpha(v)^{-1} \\
 (14) \quad & = H_t^\alpha(v) W_t^\beta(u)W_t^\beta(1)^{-1} H_t^\alpha(v)^{-1} \\
 (15) \quad & = H_t^\alpha(v)W_t^\beta(u)H_t^\alpha(v) H_t^\alpha(v)^{-1}W_t^\beta(-1)H_t^\alpha(v)^{-1} \\
 (16) \quad & \approx W_t^\beta(uv^{\beta\alpha^*}) W_t^\beta(-v^{\beta\alpha^*}) \\
 (17) \quad & = W_t^\beta(uv^{\beta\alpha^*}) W_t^\beta(1)^{-1}W_t^\beta(1) W_t^\beta(v^{\beta\alpha^*})^{-1} \\
 (18) \quad & = H_t^\beta(uv^{\beta\alpha^*}) H_t^\beta(v^{\beta\alpha^*})^{-1}.
 \end{aligned}$$

6. Singuläre Auflösung von Chevalley-Gruppen

Ähnlich zeigen wir (d):

$$(19) \quad W_t^\alpha(v) H_t^\beta(u) W_t^\alpha(v)^{-1}$$

$$(20) \quad = W_t^\alpha(v) W_t^\beta(u) W_t^\beta(1)^{-1} W_t^\alpha(v)^{-1}$$

$$(21) \quad = W_t^\alpha(v) W_t^\beta(u) W_t^\alpha(v) W_t^\alpha(v)^{-1} W_t^\beta(-1) W_t^\alpha(v)^{-1}$$

$$(22) \quad \approx W_t^{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta u v^{-\beta\alpha^*}) W_t^{\sigma_\alpha(\beta)}(-\eta v^{-\beta\alpha^*})$$

$$(23) \quad = W_t^{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta u v^{-\beta\alpha^*}) W_t^{\sigma_\alpha(\beta)}(1)^{-1} W_t^{\sigma_\alpha(\beta)}(1) W_t^{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta v^{-\beta\alpha^*})^{-1}$$

$$(24) \quad = H_t^{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta u v^{-\beta\alpha^*}) H_t^{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta v^{-\beta\alpha^*})^{-1}.$$

Wir bemerken noch abschließend, dass man (c) auch über (d) beweisen kann, wodurch sich der Beweis allerdings nicht verkürzt. $\square$

Analog zu Lemma 4.13 (g) untersuchen wir W_t^α und $W_t^{-\alpha}$.

Lemma 6.40. *Sei $\alpha \in \Phi$ beliebig. Dann gelten für alle $s \in k^\times$:*

$$(a). \quad W_t^\alpha(s) \approx W_t^{-\alpha}(-s^{-1}) \text{ (homotop relativ } t=0),$$

$$(b). \quad H_t^\alpha(s) \approx H_t^{-\alpha}(s)^{-1} \text{ (homotop relativ } t=0),$$

$$(c). \quad W_t^\alpha(1) H_t^\alpha(s) W_t^\alpha(1)^{-1} \approx H_t^\alpha(s^{-1}) \text{ (homotop relativ } t=0).$$

Beweis. Für Aussage (a) rechnen wir mit Lemma 6.38 nach:

$$(25) \quad W_t^\alpha(s) W_t^{-\alpha}(-s^{-1})^{-1}$$

$$(26) \quad = X_t^\alpha(s) X_t^{-\alpha}(-s^{-1}) X_t^\alpha(s) W_t^{-\alpha}(-s^{-1})^{-1}$$

$$(27) \quad = X_t^{-\alpha}(-s^{-1})^{-1} X_t^{-\alpha}(-s^{-1}) X_t^\alpha(s) X_t^{-\alpha}(-s^{-1}) X_t^\alpha(s) W_t^{-\alpha}(-s^{-1})^{-1}$$

$$(28) \quad = X_t^{-\alpha}(-s^{-1})^{-1} W_t^{-\alpha}(-s^{-1}) X_t^\alpha(s) W_t^{-\alpha}(-s^{-1})^{-1}$$

$$(29) \quad \approx X_t^{-\alpha}(-s^{-1})^{-1} X_t^{-\alpha}(-s^{-1})$$

$$(30) \quad = \text{Id}.$$

Damit lässt sich nun leicht Aussage (b) folgern:

$$(31) \quad H_t^\alpha(s) H_t^{-\alpha}(s)$$

$$(32) \quad = W_t^\alpha(s) W_t^\alpha(1)^{-1} W_t^{-\alpha}(s) W_t^{-\alpha}(1)^{-1}$$

$$(33) \quad \approx W_t^\alpha(s) W_t^{-\alpha}(1) W_t^{-\alpha}(s) W_t^{-\alpha}(1)^{-1}$$

$$(34) \quad \approx W_t^\alpha(s) W_t^\alpha(-s)$$

$$(35) \quad = \text{Id}.$$

Schließlich zeigen wir (c):

$$\begin{aligned}
 (36) \quad & W_t^\alpha(1)H_t^\alpha(s)W_t^\alpha(1)^{-1} \\
 (37) \quad & \approx (W_t^\alpha(1)H_t^{-\alpha}(s)W_t^\alpha(1)^{-1})^{-1} \\
 (38) \quad & \approx (H_t^\alpha(-s)H_t^\alpha(-1)^{-1})^{-1} \\
 (39) \quad & = H_t^\alpha(-1)H_t^\alpha(-s) \\
 (40) \quad & = W_t^\alpha(-1)W_t^\alpha(1)^{-1}W_t^\alpha(1)W_t^\alpha(-s)^{-1} \\
 (41) \quad & = W_t^\alpha(-1)W_t^\alpha(-s)^{-1} \\
 (42) \quad & \approx W_t^{-\alpha}(1)W_t^{-\alpha}(s^{-1})^{-1} \\
 (43) \quad & = H_t^{-\alpha}(s^{-1})^{-1} \\
 & \approx H_t^\alpha(s^{-1}). \quad \square
 \end{aligned}$$

Lemma 6.41. Die Schleifen $C_t^\alpha(x, y)$ für $\alpha \in \Phi$ und $x, y \in k^\times$ erfüllen die Relation

$$C_t^\alpha(x, y) \approx C_t^\alpha(x^{-1}, y^{-1}) \text{ (homotop relativ } t = 0 \text{ und } t = 1).$$

Beweis. Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned}
 & C_t^\alpha(x, y) = C_t^\alpha(x, y)W_t^\alpha(1)W_t^\alpha(1)^{-1} \\
 (\text{Lemma 6.37}) \quad & \approx W_t^\alpha(1)C_t^\alpha(x, y)W_t^\alpha(1)^{-1} \\
 (\text{Definition } C_t^\alpha) \quad & = W_t^\alpha(1)H_t^\alpha(x)H_t^\alpha(y)H_t^\alpha(xy)^{-1}W_t^\alpha(1)^{-1} \\
 (\text{Lemma 6.40 (c)}) \quad & \approx H_t^\alpha(x^{-1})H_t^\alpha(y^{-1})H_t^\alpha((xy)^{-1})^{-1} \\
 (\text{Definition } C_t^\alpha) \quad & = C_t^\alpha(x^{-1}, y^{-1}). \quad \square
 \end{aligned}$$

Analog zu Lemma 4.15 (a) und (b) untersuchen wir, wie die Schleifenabbildungen C_t^α für verschiedene Wurzeln zusammenhängen.

Lemma 6.42. Sei $\alpha \in \Phi$ beliebig. Dann gelten:

- (a). $C_t^\alpha(x, y) \approx C_t^{-\alpha}(x, y)$ (relativ $t = 0$ und $t = 1$).
- (b). Für alle $\sigma \in W$ ist $C_t^{\sigma(\alpha)}(x, y) \approx C_t^{\pm\alpha}(x, y)$.

Beweis. Aussage (a) rechnen wir mit Lemma 6.37 und Lemma 6.40 (b) nach:

$$\begin{aligned}
 (44) \quad & C_t^\alpha(x, y) \\
 (45) \quad & = H_t^\alpha(xy)^{-1}H_t^\alpha(xy)C_t^\alpha(x, y) \\
 (46) \quad & \approx H_t^\alpha(xy)^{-1}C_t^\alpha(x, y)H_t^\alpha(xy) \\
 (47) \quad & = H_t^\alpha(xy)^{-1}H_t^\alpha(x)H_t^\alpha(y)H_t^\alpha(xy)^{-1}H_t^\alpha(xy) \\
 (48) \quad & = H_t^\alpha(xy)^{-1}H_t^\alpha(x)H_t^\alpha(y) \\
 (49) \quad & \approx H_t^{-\alpha}(xy)H_t^{-\alpha}(x)^{-1}H_t^{-\alpha}(y)^{-1} \\
 (50) \quad & = C_t^{-\alpha}(y, x)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Aussage (b) rechnen wir mit Lemma 6.39 und Lemma 6.37 nach:

6. Singuläre Auflösung von Chevalley-Gruppen

Aus Lemma 6.39 (d) folgt mit $\beta := \sigma_\alpha(\gamma)$

$$W_t^\alpha(1)H_t^\gamma(u)W_t^\alpha(1)^{-1} \approx H_t^\beta(\eta u)H_t^\beta(\eta)^{-1},$$

für den Fall $\eta = 1$ also $W_t^\alpha(1)H_t^\gamma(u)W_t^\alpha(1)^{-1} \approx H_t^\beta(u)$.

Für den Fall $\eta = -1$ rechnen wir mit Lemma 6.39 (d):

$$\begin{aligned} & W_t^\beta(1) W_t^\alpha(1)H_t^\gamma(u)W_t^\alpha(1)^{-1} W_t^\beta(1)^{-1} \\ & \approx W_t^\beta(1) H_t^\beta(-u)H_t^\beta(-1)^{-1} W_t^\beta(1)^{-1} \\ & = W_t^\beta(1)H_t^\beta(-u)W_t^\beta(1)^{-1} W_t^\beta(1)H_t^\beta(-1)^{-1}W_t^\beta(1)^{-1} \\ & = H_t^\beta(-u^{-1}) H_t^\beta(-1)^{-1} \\ & = W_t^\beta(-u^{-1})W_t^\beta(1)^{-1}W_t^\beta(1)W_t^\beta(-1)^{-1} \\ & = W_t^\beta(-u^{-1})W_t^\beta(-1)^{-1} \end{aligned}$$

nun folgt mit Lemma 6.40 (a)

$$W_t^\beta(-u^{-1})W_t^\beta(-1)^{-1} \approx W_t^{-\beta}(u)W_t^{-\beta}(1)^{-1} = H_t^\beta(u).$$

Insgesamt ist für $\eta \in \{\pm 1\}$ also

$$\begin{aligned} C_t^\gamma(x, y) &= H_t^\gamma(x)H_t^\gamma(y)H_t^\gamma(xy)^{-1} \\ &\approx \begin{cases} W_t^\alpha(1)^{-1} C_t^\beta(x, y)W_t^\alpha(1) & \text{falls } \eta = 1, \\ W_t^\alpha(1)^{-1}W_t^\beta(1)^{-1} C_t^{-\beta}(x, y)W_t^\beta(1)W_t^\alpha(1) & \text{falls } \eta = -1 \end{cases} \\ &\approx \begin{cases} C_t^\beta(x, y) & \text{oder} \\ C_t^{-\beta}(x, y). \end{cases} \end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt nur noch Lemma 6.37 benutzt. $\square$

Analog zu Lemma 4.15 (c,d) schreiben wir Kommutatoren von H_t^α und H_t^β als Schleifen.

Lemma 6.43.

(a). Sind $\alpha, \beta \in \Phi$ beliebige Wurzeln, so gilt für alle $u, v \in k^\times$

$$[H_t^\alpha(u), H_t^\beta(v)] \approx C_t^\alpha(u, v^{\alpha\beta^*}) \approx C_t^\beta(v, u^{\beta\alpha^*})^{-1}.$$

(b). Ist $\alpha \in \Phi(\mathbb{G})$ eine lange Wurzel und $\Phi(\mathbb{G})$ nicht symplektisch, so sind die Schleifen $C_t^\alpha(u, v)$ für $u, v \in k^\times$ bilinear bis auf Homotopie relativ Basispunkt.

Beweis. Wir rechnen einmal mit Lemma 6.39 (c):

$$\begin{aligned}
 & [H_t^\alpha(u), H_t^\beta(v)] \\
 &= H_t^\alpha(u) H_t^\beta(v) H_t^\alpha(u)^{-1} H_t^\beta(v)^{-1} \\
 &\approx H_t^\alpha(u) (H_t^\alpha(uv^{\alpha\beta^*}) H_t^\alpha(v^{\alpha\beta^*})^{-1})^{-1} \\
 &= H_t^\alpha(u) H_t^\alpha(v^{\alpha\beta^*}) H_t^\alpha(uv^{\alpha\beta^*})^{-1} \\
 &= C_t^\alpha(u, v^{\alpha\beta^*}),
 \end{aligned}$$

und ein zweites Mal: $[H_t^\alpha(u), H_t^\beta(v)]$

$$\begin{aligned}
 &= H_t^\alpha(u) H_t^\beta(v) H_t^\alpha(u)^{-1} H_t^\beta(v)^{-1} \\
 &\approx H_t^\beta(vu^{\beta\alpha^*}) H_t^\beta(u^{\beta\alpha^*}) H_t^\beta(v)^{-1} \\
 &= C_t^\beta(v, u^{\beta\alpha^*})^{-1}.
 \end{aligned}$$

Damit ist (a) gezeigt.

Nun gibt es zu $\alpha \in \Phi$ lange Wurzel in einem nicht-symplektischen Wurzelsystem Φ stets ein $\beta \in \Phi$ mit $\alpha\beta^* = -1$. Mit Aussage (a) haben wir dann

$$C_t^\alpha(u, v) = [H_t^\alpha(u), H_t^\beta(v)].$$

Damit ist $[C_t^\alpha(u, v)]$ nun linear in u : $C_t^\alpha(xy, z)$

$$\begin{aligned}
 &\approx [H_t^\alpha(xy), H_t^\beta(z)] \\
 &= [C_t^\alpha(x, y)^{-1} H_t^\alpha(x) H_t^\alpha(y), H_t^\beta(z)] \\
 &\approx C_t^\alpha(x, y)^{-1} C_t^\alpha(x, y) [H_t^\alpha(x) H_t^\alpha(y), H_t^\beta(z)] \\
 &= [H_t^\alpha(x) H_t^\alpha(y), H_t^\beta(z)] \\
 &= H_t^\alpha(x) [H_t^\alpha(y), H_t^\beta(z)] H_t^\alpha(x)^{-1} [H_t^\alpha(x), H_t^\beta(z)] \\
 &\approx H_t^\alpha(x) C_t^\alpha(y, z) H_t^\alpha(x)^{-1} C_t^\alpha(x, z) \\
 &\approx H_t^\alpha(x) H_t^\alpha(x)^{-1} C_t^\alpha(x, z) C_t^\alpha(y, z) \\
 &= C_t^\alpha(x, z) C_t^\alpha(y, z).
 \end{aligned}$$

Diese Rechnung ist symmetrisch in den beiden Faktoren von $C_t^\alpha(u, v)$, also ist $[C_t^\alpha(u, v)]$ bilinear. $\square$

Ist das Wurzelsystem Φ möglicherweise symplektisch, so können wir wenigstens noch eine Abschwächung von Bilinearität zeigen, analog zu Lemma 4.16.

Lemma 6.44. *Die ausgezeichneten Schleifen C_t^α erfüllen bis auf Homotopie eine abgeschwächte Bilinearität:*

$$[C_t^\alpha(x, y)] \circ [C_t^\alpha(xy, z)] = [C_t^\alpha(x, yz)] \circ [C_t^\alpha(y, z)].$$

6. Singuläre Auflösung von Chevalley-Gruppen

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass

$$[C_t^\alpha(a, b)] \circ [C_t^\alpha(c, d)] = [C_t^\alpha(a, b) \cdot C_t^\alpha(c, d)],$$

da zwei übereinander distribuierende Monoide (hier: $(\pi_1, \cdot)$ und $(\pi_1, \circ)$, also $\pi_1(\mathbb{G}_\bullet)$ mit Multiplikation und mit Verkettung) übereinstimmen, wie wir in Lemma 5.32 gezeigt haben.

$$\begin{aligned} & C_t^\alpha(x, y) C_t^\alpha(xy, z) \\ (\text{Definition } C_t^\alpha) &= H_t^\alpha(x) H_t^\alpha(y) H_t^\alpha(xy)^{-1} H_t^\alpha(xy) H_t^\alpha(z) H_t^\alpha(xyz)^{-1} \\ (\text{Kürzen}) &= H_t^\alpha(x) H_t^\alpha(y) H_t^\alpha(z) H_t^\alpha(xyz)^{-1} \\ (\text{Definition } C_t^\alpha(y, z)) &= H_t^\alpha(x) C_t^\alpha(y, z) H_t^\alpha(yz) H_t^\alpha(xyz)^{-1} \\ (\text{mit Lemma 6.37}) &\approx H_t^\alpha(x) H_t^\alpha(yz) H_t^\alpha(xyz)^{-1} C_t^\alpha(y, z) \\ (\text{Definition } C_t^\alpha(x, yz)) &= C_t^\alpha(x, yz) C_t^\alpha(y, z). \end{aligned}$$

Nun können wir für die Homotopieklasse mit Basispunkt folgern:

$$\begin{aligned} & = [C_t^\alpha(x, y)] \circ [C_t^\alpha(xy, z)] \\ (\cdot = \circ) & = [C_t^\alpha(x, y) C_t^\alpha(xy, z)] \\ (\text{vorige Betrachtung}) & = [C_t^\alpha(x, yz) C_t^\alpha(y, z)] \\ & = [C_t^\alpha(x, yz)] \circ [C_t^\alpha(y, z)]. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 6.45. *Die Morphismen $C_t^\alpha : \mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m \rightarrow \Omega \mathbb{G}_\bullet$ für $\alpha \in \Phi$ erfüllen die Steinberg-Relation bis auf Homotopie relativ Basispunkt, d.h. für alle $x \in k^\times$ mit $x \neq 1$ ist $C_t^\alpha(x, 1-x) \approx \text{Id}$ (homotop relativ $t = 0$ und $t = 1$).*

Der Beweis dieses Satzes wird erst im nächsten Kapitel in Form von Korollar 7.15 gegeben, da wir hierzu einen allgemeinen Satz aus der $\mathbb{A}^1$ -lokalen “motivischen” Homotopietheorie heranziehen werden. Um Matsumotos Beweis direkt zu kopieren, wäre eine Bruhat-Zerlegung auf $\mathbb{G}_\bullet$ vonnöten gewesen, die dem Wissen des Autors nach noch nicht untersucht wurde. $\diamond$

6.7. Die Faser über dem Basispunkt

Satz 6.46. *Sei $\alpha \in \Phi$ eine lange Wurzel. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} C^\alpha : k^\times \times k^\times &\rightarrow \pi_1(\mathbb{G}_\bullet, \text{Id}), \\ (a, b) &\mapsto [C_t^\alpha(a, b)] \end{aligned}$$

faktoriisiert über einen Gruppenhomomorphismus

$$C^\alpha : K_2^{Sp}(k) \rightarrow \pi_1(\mathbb{G}_\bullet, \text{Id}).$$

Beweis. Die Normiertheit $C_t^\alpha(1, b) = \text{Id} = C_t^\alpha(a, 1)$ haben wir bereits in Lemma 6.35 gezeigt. Die Relation $[C_t^\alpha(a, b)] = [C_t^\alpha(a^{-1}, b^{-1})]$ haben wir in Lemma 6.41 gezeigt. Schwache Bilinearität haben wir in Lemma 6.44 bewiesen. Die Steinberg-Relation ist nach Satz 6.45 erfüllt. $\square$

Proposition 6.47. *Ist Φ kein symplektisches Wurzelsystem, so faktoriisiert der Gruppenhomomorphismus*

$$C^\alpha : K_2^{Sp}(k) \rightarrow \pi_1(\mathbb{G}_\bullet, \text{Id})$$

aus Satz 6.46 über einen Gruppenhomomorphismus

$$C^\alpha : K_2^M(k) \rightarrow \pi_1(\mathbb{G}_\bullet, \text{Id}).$$

Beweis. Nach Lemma 6.43 ist die Abbildung

$$C^\alpha : k^\times \times k^\times \rightarrow \Omega \mathbb{G}_\bullet$$

$\mathbb{Z}$ -bilinear bis auf Homotopie relativ Basispunkt in $\Omega \mathbb{G}_\bullet$. $\square$

Proposition 6.48. *Wenn Φ nicht symplektisch ist, so hängt der Homomorphismus C^α nicht von den getroffenen Wahlen der positiven Wurzeln Φ^+ oder der Wahl der langen Wurzel $\alpha \in \Phi$ ab.*

Beweis. Es gibt für nicht-symplektische Wurzelsysteme Φ und zwei lange Wurzeln $\alpha, \beta \in \Phi$ stets ein Element der Weylgruppe $\sigma \in W$ mit $\sigma(\alpha) = \beta$. Wir haben in Lemma 6.42 (b) gezeigt, dass dann bereits für alle $x, y \in k^\times$ gilt: $[C_t^\beta(x, y)] = [C_t^{\pm\alpha}]$. In Lemma 6.42 (a) haben wir gezeigt, dass $[C_t^{\pm\alpha}] = [C_t^\alpha]$ ist. Damit stimmen die Homomorphismen $C_t^\alpha, C_t^\beta : k^\times \times k^\times \rightarrow \pi_1(\mathbb{G}_\bullet, \text{Id})$ überein. $\square$

Satz 6.49. *Sei R eine k -Algebra und $\mathbb{G}$ eine einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe mit Wurzelsystem Φ , sodass*

$$K_2(\Phi, R[t]) \simeq K_2(\Phi, R).$$

Dann liftet jeder Weg in $\mathbb{G}(R)$ bis auf freie Homotopie eindeutig nach $\text{St}_\bullet(R)$ und homotope Wege liften auf die selbe Homotopieklasse von Wegen in $\text{St}_\bullet(R)$.

6. Singuläre Auflösung von Chevalley-Gruppen

Beweis. Sei $\gamma_t \in \mathbb{G}(R[t])$, dann gibt es nach Proposition 6.15 verschiedene Lifts $\tilde{\gamma}_t$, die sich um multiplikative Faktoren in $K_2(\Phi, R[t])$ unterscheiden. Nach Voraussetzung an Φ und R unterscheiden sie sich also um Faktoren aus $K_2(\Phi, R)$, sodass wir für einen gegebenen Lift $\tilde{\gamma}_t$ den Lift $\tilde{\gamma}_t \tilde{\gamma}_0^{-1}$ bilden können (das entspricht der Wahl eines kanonischen Basispunkts in $\text{St}_\bullet$). Jeder andere Lift $\tilde{\gamma}'_t$ unterscheidet sich nun nur um ein Element aus $K_2(\Phi, R)$ von $\tilde{\gamma}_t \tilde{\gamma}_0^{-1}$, allerdings ist $\tilde{\gamma}_t \tilde{\gamma}_0^{-1} \tilde{\gamma}'_t (\tilde{\gamma}'_0)^{-1} = \text{Id}$, also ist der Lift $\tilde{\gamma}_t \tilde{\gamma}_0^{-1}$ eindeutig bis auf freie Homotopie.

Sind nun $\gamma_t, \gamma'_t \in \mathbb{G}(R[t])$ homotop, so gibt es eine Homotopie $\tau(t, s) \in \mathbb{G}(R[t, s])$ mit $\tau(t, 0) = \gamma_t$ und $\tau(t, 1 - t) = \gamma'_t$. Diese Homotopie liftet nach Proposition 6.15 und der Voraussetzung an K_2 bis auf einen multiplikativen Faktor in $K_2(\Phi, R)$ eindeutig zu einer Homotopie $\tilde{\tau}(t, s)$. Nun ist $\tilde{\tau}(t, s) \tilde{\tau}(0, s)^{-1}$ ein bis auf freie Homotopie eindeutiger Lift von τ , der die zuvor konstruierten Lifts $\tilde{\gamma}_t$ und $\tilde{\gamma}'_t$ mit $\tilde{\gamma}_0 = \text{Id} = \tilde{\gamma}'_0$ ineinander überführt. $\square$

Satz 6.50. *Sei R eine k -Algebra und $\mathbb{G}$ eine einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe mit Wurzelsystem Φ , sodass*

$$K_2(\Phi, R[t]) \simeq K_2(\Phi, R).$$

Dann ist eine wohldefinierte Abbildung $L : \pi_1(\mathbb{G}_\bullet(R), \text{Id}) \rightarrow K_2(\Phi, R)$ definiert durch die Vorschrift, für eine Homotopieklasse von Schleifen $[\omega_t]$ einen Repräsentanten ω_t auf einen Weg $[\tilde{\gamma}_t]$ mit $\tilde{\gamma}_0 = \text{Id}$ in $\text{St}_\bullet$ zu liften und dann auf den Endpunkt $\tilde{\gamma}_1 \in K_2(\Phi, R)$ abzubilden.

Beweis. Nach Proposition 6.49 ist der Weg $\tilde{\gamma}_t \in \text{St}_\bullet$ für die Homotopieklasse von ω_t bis auf den Basispunkt erhaltende Homotopie eindeutig. Der Punkt $\tilde{\gamma}_1$ liegt in der Faser über Id , also $K_2(\Phi, R)$, welche diskret in $\text{St}_\bullet$ liegt, und damit ist $\tilde{\gamma}_1$ invariant unter Basispunkt-erhaltender Homotopie des Weges $\tilde{\gamma}_t$. $\square$

Bemerkung 6.51. Die hier betrachtete Abbildung L ist nach Konstruktion der Homomorphismus $\pi_0(L)$ aus Lemma 5.38.

Satz 6.52. *Sei Φ ein Wurzelsystem, welches Homotopieinvarianz in einer Variablen über k erfüllt, also*

$$K_2(\Phi, k[t]) \simeq K_2(\Phi, k).$$

Dann sind die Homomorphismen C^α und L zueinander invers.

Beweis. Seien $a, b \in k^\times$, also $\{a, b\} \in K_2^M(k)$. Dann bildet L die Homotopieklasse der Schleife $C_t^\alpha(a, b)$ auf $c_\alpha(a, b) = \{a, b\} \in K_2^M(k)$ ab.

Sei umgekehrt eine Schleife $M(t) = \prod_{i \in I} X_t^{\alpha_i}(u_i)$ gegeben. Dann bildet L ihre Homotopieklasse auf $[\prod_{i \in I} \tilde{x}_{\alpha_i}(u_i)]$ ab, nach Matsumoto ist das ein Produkt $\prod_{j \in J} c_\alpha(a_j, b_j)$, also ist $L([M]) = L([M'])$ mit $M'(t) := \prod_{j \in J} C_t^\alpha(a_j, b_j)$. Nun ist noch zu zeigen, dass $[M] = [M']$, also dass $M(t) \approx M'(t)$ ist. Es ist $M'(t)M(t)^{-1}$ eine Schleife in $\text{St}_\bullet$, aber $\pi_1(\text{St}_\bullet, \text{Id}) = 0$ nach Lemma 6.24. Also gibt es eine Homotopie $M(t, s)$ der Schleife $M'(t)M(t)^{-1}$ auf die konstante Schleife Id . Diese Homotopie liefert eine Homotopie $M(t, s)M(t)$ von $M'(t)$ auf $M(t)$, also $[M] = [M']$. $\square$

7. Motivische Homotopietheorie

7.1. Einführung

Der allgemeine Formalismus zur Definition von Homotopien und Homotopiegruppen ist Quillens Homotopical Algebra [Qui67], insbesondere der grundlegende Begriff der Modellkategorie. Morel und Voevodsky haben eine Modellkategorie definiert [MV99], in der man jedem Schema, wie auch jedem simplizialen Schema und jeder simplizialen Prägarbe auf Schemata, Homotopiegruppen zuordnen kann und in der sich die affine Gerade $\mathbb{A}^1$ wie das Einheitsintervall der klassischen Topologie verhält. In der K-Theorie verwendet man nur glatte Schemata, da nur dann K-Theorie Homotopie-invariant ist.

Dazu wird die Kategorie der glatten Schemata Sm/k über einem perfekten Körper k eingebettet in die Kategorie der simplizialen Prägarben auf Sm/k , auch bezeichnet mit $\Delta^{\mathrm{op}} \mathrm{PShv}(\mathrm{Sm}/k)$. Die Yoneda-Einbettung in eine Prägarbenkategorie geschieht, um alle kleinen Limiten und Kolimiten in der Kategorie zu haben. Man verwendet Prägarben mit Werten in der Kategorie simplizialer Mengen, um auf simpliziale Homotopietheorie zurückgreifen zu können.

Wir verwenden auf simplizialen Mengen die *Kan*-Modellstruktur aus Definition 5.20.

Während Morel und Voevodsky in [MV99] Garben in der Nisnevich-Topologie verwenden, betrachten wir zunächst nur Prägarben - die entsprechenden Modellkategorien sind Quillen-äquivalent nach [Jar00, Theorem B.6]. Zur Nisnevich-Topologie und ihren Anwendungen gibt es eine ausführliche Bibliographie von Nisnevich [Nis].

Wir werden im Folgenden Begriffe und Sätze der abstrakten Homotopietheorie nur soweit notwendig verwenden und verweisen auf die Lehrbücher von Hirschhorn [Hir03] und Hovey [Hov99] für Modellkategorien und Goerss und Jardine [GJ99] sowie May [May92] für simpliziale Objekte.

Zunächst betrachtet man auf $\Delta^{\mathrm{op}} \mathrm{PShv}(\mathrm{Sm}/k)$ eine Modellstruktur, in der sich $\mathbb{A}^1$ noch nicht wie das Einheitsintervall verhält:

Definition 7.1. Die *Jardine-Modellstruktur* auf $\Delta^{\mathrm{op}} \mathrm{PShv}(\mathrm{Sm}/k)$ ist gegeben durch: Kofaserungen sind genau die Monomorphismen, schwache Äquivalenzen sind genau die Abbildungen, die auf Halmen schwache Äquivalenzen von simplizialen Mengen induzieren und Faserungen sind über die rechte Liftungseigenschaft definiert.

Diese Modellkategorie ist somit eine eigentliche simpliziale Modellkategorie, siehe [MV99, Remark 1.5, S. 49] und [MV99, Remark 1.9, S. 50] für die analogen Aussagen für Garben.

Um eine Modellkategorie zu erhalten, in der $\mathbb{A}^1$ zusammenziehbar ist und in der $X \times \mathbb{A}^1$ und X schwach äquivalent sind, forciert man diese Eigenschaften mit einer Bousfield-Lokalisierung am Objekt $\mathbb{A}^1$ (siehe [Hir03, Definition 3.3.1, Chapter 3.3, S. 57]). Die so erhaltene Modellkategorie heißt *$\mathbb{A}^1$ -lokale Modellkategorie*.

Um Homotopiegruppen zu berechnen, verwenden wir eine $\mathbb{A}^1$ -schwach äquivalente Ersetzung, den singulären Funktor $\mathrm{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1}$. Die $\mathbb{A}^1$ -Homotopiegruppe $\pi_n^{\mathbb{A}^1}(X)(R)$ eines glatten Schemas X über einem Ring R stimmt im Allgemeinen nicht mit der simplizialen Homotopiegruppe von $X(R)$, also mit $\pi_n(X)(R)$ in der Jardine-Modellstruktur überein. Ein Vorteil der simplizialen Homotopietheorie ist aber, dass sie sich lokal berechnen lässt, d.h. auf lokalen Ringen bereits vollständig festgelegt ist. Ist R ein

lokaler Ring, so ist $\pi_n(X)(R) = \pi_n(X(R))$, die Homotopiegruppe der simplizialen Menge $X(R)$ in der Kan-Modellstruktur.

In Kapitel 6 haben wir bereits die simpliziale Fundamentalgruppe von $\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}$ bestimmt. Die $\mathbb{A}^1$ -lokalen Fundamentalgruppen eines Schemas X stimmen mit denen der singulären Ersetzung überein:

Proposition 7.2. *Für eine Prägarbe X auf Sm/k ist $\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1}(X)$ eine $\mathbb{A}^1$ -schwach äquivalente simpliziale Prägarbe. Der Funktor $\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1}$ bewahrt $\mathbb{A}^1$ -Faserungen.*

Das ist [MV99, Korollar 3.8, S. 89].

Um zu sehen, dass wir damit bereits die $\mathbb{A}^1$ -lokale Fundamentalgruppe bestimmt haben, benötigen wir die affine Brown-Gersten-Eigenschaft.

7.2. Die affine Brown-Gersten-Eigenschaft

Der Brown-Gersten-Formalismus [BG73] erlaubt, für gewisse Klassen von Räumen (Brown-Gersten-Klassen) Schnitte von Garben, die gewisse Eigenschaften haben (Brown-Gersten-Eigenschaft) über diesen Räumen leichter zu bestimmen. Wir würden diesen Formalismus gerne verwenden, um Schnitte der Homotopiegruppen-Prägarben über einem Körper oder einem lokalen regulären Ring zu bestimmen - leider sind dies keine Brown-Gersten-Klassen, sodass ein etwas anderer Weg gewählt werden muss. Morel [Mor07] hat dafür die affine Brown-Gersten-Eigenschaft definiert, die es erlaubt, Schnitte über glatten affinen Schemata zu bestimmen. Singuläre Ersetzungen von Chevalley-Gruppen erfüllen diese Eigenschaft.

Die Definition von Grothendieck-Topologien und Garben auf einem Situs setzen wir voraus, wie in [MM92, Definition 1 und 2, S. 110] ausgeführt.

Zur Motivation betrachten wir das Garbenaxiom, zunächst allgemein, dann für die Zariski-Topologie.

Definition 7.3. Ist F eine mengenwertige Prägarbe auf Sm/k , so heißt F *Garbe* bezüglich einer Prätopologie τ , wenn für alle Überdeckungen $(U_i \rightarrow X)_{i \in I}$ von τ das Diagramm

$$F(X) \rightarrow \prod_{i \in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} F(U_i \times_X U_j)$$

ein Differenzkern ist, und alle vorkommenden Faserprodukte stets existieren.

Zur Definition von Differenzkernen (engl. Equalizer) siehe [Mac71, Kapitel II.4, S. 70].

Nun ist die Zariski-Topologie auf Sm/k bereits durch alle offenen Überdeckungen $X = U \cup V$ gegeben (d.h. man kann die Garbeneigenschaft darauf prüfen), also Überdeckungen der Form $(U \rightarrow X, V \rightarrow X)$ mit $p : U \rightarrow X$ und $V \rightarrow X$ offene Einbettungen sodass $p|_{p^{-1}(X \setminus V)} : p^{-1}(X \setminus V) \rightarrow X \setminus V$ ein Isomorphismus ist.

Definition 7.4. Wir nennen ein Quadrat der Form

$$\begin{array}{ccc} U \times_X V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X \end{array}$$

ein *elementares Quadrat* der Zariski-Topologie, wenn es kartesisch ist, $U \hookrightarrow X$ und $V \hookrightarrow X$ offene Einbettungen sind und $X = U \cup V$ ist.

Damit lässt sich das Garbenaxiom etwas einfacher schreiben, da

$$F(X) \rightarrow F(U) \times F(V) \rightrightarrows F(U \times_X V)$$

ein Differenzkern ist, genau dann, wenn ein gewisses Diagramm kartesisch ist:

Lemma 7.5. *Ist F eine mengenwertige Prägarbe auf $\mathbf{Sm}/k$, so ist F eine Garbe in der Zariski-Topologie genau dann, wenn für alle elementaren Quadrate in $\mathbf{Sm}/k$ das Quadrat*

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \longrightarrow & F(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(U) & \longrightarrow & F(U \times_X V) \end{array}$$

ein kartesisches Quadrat ist.

Die Abbildungen und die universelle Eigenschaft sind die selben wie im Differenzkern-Diagramm zuvor. $\diamond$

Davon wollen wir nun eine homotopietheoretische Version definieren.

Definition 7.6. Sei F eine Prägarbe auf $\mathbf{Sm}/k$ mit Werten in simplizialen Mengen. Dann sagen wir, F hat die *Brown-Gersten-Eigenschaft* für die Zariski-Topologie, wenn für alle elementaren Quadrate in $\mathbf{Sm}/k$ das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \longrightarrow & F(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(U) & \longrightarrow & F(U \times_X V) \end{array}$$

ein homotopiekartesisches Quadrat (wie in Definition 5.10) ist.

Bemerkung 7.7. Die Eigenschaft, bereits durch gewisse Quadrate vollständig bestimmt zu sein, teilt sich die Zariski-Topologie mit anderen Topologien auf $\mathbf{Sm}/k$, wie z.B. der Nisnevich-Topologie, wie in [MV99, Proposition 1.4, S. 96] ausgeführt. Der allgemeine Formalismus dafür sind cd-Strukturen (cd=completely decomposed), wie in [Voe10] vorgestellt. Lemma 7.5 für eine beliebige cd-Struktur ist [Voe10, Lemma 2.9] und die Brown-Gersten-Eigenschaft für eine beliebige cd-Struktur ist [Voe10, Definition 3.3.] (dort heißt eine simpliziale Prägarbe mit dieser Eigenschaft allerdings *flasque*, also *welk*).

Bemerkung 7.8. Die elementaren Quadrate der Nisnevich-Topologie, sind Quadrate von der Form

$$\begin{array}{ccc} U \times_X V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X \end{array}$$

wobei $U \hookrightarrow X$ offene Immersion, $V \rightarrow X$ étale, sodass die Einschränkung auf $X \setminus U$ Isomorphismus ist.

Es gibt einige Fälle, in denen eine gegebene Prägarbe nicht die Brown-Gersten-Eigenschaft hat, jedoch auf einer Klasse von kartesischen Quadraten noch homotopiekartesische Quadrate liefert.

Definition 7.9. Sei F eine simpliziale Prägarbe auf $\mathbf{Sm}/k$. Dann hat F die *affine Brown-Gersten-Eigenschaft* bezüglich der Zariski- bzw. Nisnevich-Topologie, wenn für jedes elementare Quadrat Q , dessen Komponenten $(X, U, V, U \times_X V)$ affin sind, $F(Q)$ homotopiekartesisch ist. Wir sagen, F habe *affine $\mathbb{A}^1$ -Invarianz*, wenn für alle affinen $U \in \mathbf{Sm}/k$ die Projektion $U \times \mathbb{A}^1 \rightarrow U$ unter F schwache Äquivalenzen $F(U) \rightarrow F(U \times \mathbb{A}^1)$ induziert.

Dies ist [Mor07, Definition A.1.7, S. 41].

Proposition 7.10. Sei F eine simpliziale Prägarbe auf $\mathbf{Sm}/k$. Wenn F affine $\mathbb{A}^1$ -Invarianz und die affine Brown-Gersten-Eigenschaft für die Zariski- bzw. Nisnevich-Topologie hat, so ist die simpliziale fibrante Ersetzung $\mathrm{Ex}_s^\infty F$ (d.h. die funktorielle fibrante Ersetzung der Jardine-Modellstruktur) bereits $\mathbb{A}^1$ -lokal und es gibt Kan-schwache Äquivalenzen $F(U) \rightarrow \mathrm{Ex}_s^\infty F(U)$ für alle affinen $U \in \mathbf{Sm}/k$.

Dies ist [Mor07, Theorem A.2.2, S. 42] für die Zariski-Topologie und [Mor07, Corollary A.3.2, S. 44] für die Nisnevich-Topologie. Dabei erinnern wir daran, dass ein Objekt $\mathbb{A}^1$ -lokal heißt, wenn der durch dieses Objekt dargestellte kontravariante Funktor Projektionen $Y \times \mathbb{A}^1 \rightarrow Y$ auf Bijektionen abbildet. Das ist [MV99, Definition 2.1, S. 106]. $\diamond$

7.3. $\mathbb{A}^1$ -Fundamentalgruppen von Chevalley-Gruppen

Jardine hat 1981 bereits die Homotopietheorie von algebraischen Gruppen studiert.

Satz 7.11 (Jardine). Sei $\mathbb{G}(\Phi)$ eine einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenem Körper k , mit Φ ein irreduzibles reduziertes Wurzelsystem. Dann gibt es einen Isomorphismus $\pi_1(\mathrm{Sing}_\bullet^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}(\Phi), \mathrm{Id}) \simeq K_2(k)$.

Das ist [Jar83, Satz 2, Seite 181 bzw. Satz 2.1, Seite 185]. Im Wesentlichen verwendet Jardine im Beweis die Matsumoto-Präsentation von $K_2(k)$. $\diamond$

Morel hat diese Aussage für SL_n auf die motivische Homotopietheorie übertragen, Wendt hat dies verallgemeinert:

Satz 7.12 (Morel, Wendt). Ist ein irreduzibles reduziertes Wurzelsystem Φ gegeben und bezeichnet $\mathbb{G}(\Phi)$ die zugehörige einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe, so hat $\mathrm{Sing}_\bullet^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}(\Phi)$ die affine Brown-Gersten-Eigenschaft (für die Nisnevich-Topologie) und damit ist

$$\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{G}(\Phi))(k) \simeq \pi_1(\mathrm{Sing}_\bullet^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{G}(\Phi))(k), \mathrm{Id}).$$

Das ist für $\Phi \neq A_1$ eine direkte Anwendung von Theorem 4.10 in [Wen10]. Moser hat in seiner Dissertation [Mos] den Fall $\Phi = A_1$ und auch einen Beweis der affinen Brown-Gersten-Eigenschaft für isotrope reduktive Gruppen bearbeitet. $\diamond$

7.4. Die Steinberg-Relation

Wir wollen in diesem Abschnitt Satz 6.45 beweisen, also nun die Steinberg-Relation für ausgezeichnete Schleifen in $\pi_1(\mathbb{G}_\bullet)$ nachrechnen.

Proposition 7.13 (Hu-Kriz). *Bezeichne $\pi : \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m$ die Projektion auf das Smash-Produkt. Dann gibt es einen Raum X und eine Abbildung $\psi : \mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m \rightarrow X$, sodass der Steinberg-Morphismus*

$$s : \mathbb{A}^1 \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m, \quad a \mapsto (a, 1 - a)$$

fortsetzbar ist zu einem Morphismus

$$\tilde{s} : \mathbb{A}^1 \rightarrow X,$$

$$\tilde{s}|_{\mathbb{A}^1 \setminus \{0, 1\}} = \psi \circ \pi \circ s,$$

und die simpliziale Suspension Σ_s von ψ

$$\Sigma_s \psi : \Sigma_s(\mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m) \rightarrow \Sigma_s X$$

ist eine $\mathbb{A}^1$ -schwache Äquivalenz. Damit lässt sich auch

$$\Sigma_s s : \Sigma_s \mathbb{A}^1 \setminus \{0, 1\} \rightarrow \Sigma_s \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$$

fortsetzen zu einem Morphismus

$$\Sigma_s \tilde{s} : \Sigma_s \mathbb{A}^1 \rightarrow \Sigma_s X,$$

der in der (instabilen) $\mathbb{A}^1$ -Homotopiekategorie mit $[\Sigma_s \psi]_{\mathbb{A}^1}^{-1}$ verknüpft die triviale Homotopieklasse liefert:

$$[\Sigma_s \psi]_{\mathbb{A}^1}^{-1} \circ [\Sigma_s \tilde{s}]_{\mathbb{A}^1} \in [\Sigma_s \mathbb{A}^1, \Sigma_s(\mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m)]_{\mathbb{A}^1}.$$

Das ist eine Abwandlung von Proposition 1 in [HK01].

Satz 7.14. *Sei $\mathbb{G}_\bullet := \text{Sing}_\bullet^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}$ die singuläre Auflösung einer algebraischen Gruppe $\mathbb{G}$ und $C : \mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m \rightarrow \Omega_s \mathbb{G}_\bullet$ ein Morphismus, wobei Ω_s den simplizialen Schleifenraum bezeichnet. Dann erfüllt C bis auf Homotopie in der Jardine-Modellstruktur die Steinberg-Relation, d.h.*

$$\forall a \in \mathbb{G}_m : [C(a, 1 - a)] \in \pi_1(\mathbb{G}_\bullet)(k) \text{ trivial.}$$

Beweis. Ist X ein kofibranter Raum und Y ein fibranter Raum, so ist in der $\mathbb{A}^1$ -lokalen Modellstruktur $[\Sigma_s X, Y]_{\mathbb{A}^1} \simeq [X, \Omega_s Y]_{\mathbb{A}^1}$. Diese Adjunktion werden wir für

7. Motivische Homotopietheorie

$X = \mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m$ oder $X = \mathbb{A}^1$ sowie für $Y = \mathbb{G}_\bullet$ verwenden, was möglich ist, da die singuläre Auflösung $\text{Sing}_\bullet^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G} = \mathbb{G}_\bullet$ bereits $\mathbb{A}^1$ -lokal fibrant ist.

Nach Voraussetzung ist

$$[C] \in [\mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m, \Omega_s \mathbb{G}_\bullet]_{\mathbb{A}^1} \simeq [\Sigma_s(\mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m), \mathbb{G}_\bullet]_{\mathbb{A}^1},$$

also können wir $[C]$ verknüpfen mit $[\Sigma_s \psi]_{\mathbb{A}^1}^{-1} \circ [\Sigma_s \tilde{s}]_{\mathbb{A}^1}$ und erhalten nach Proposition 7.13 eine triviale Homotopieklasse

$$[\tilde{C}] := [C] \circ [\Sigma_s \psi]_{\mathbb{A}^1}^{-1} \circ [\Sigma_s \tilde{s}]_{\mathbb{A}^1} \in [\Sigma_s \mathbb{A}^1, \mathbb{G}_\bullet]_{\mathbb{A}^1} \simeq [\mathbb{A}^1, \Omega \mathbb{G}_\bullet]_{\mathbb{A}^1},$$

die $[C]$ fortsetzt, d.h. jedes Element $C(a, 1 - a)$ ist homotop zu einem Element $\tilde{C}(a, 1 - a)$, welches sich auf den Basispunkt Id kontrahieren lässt. Damit ist auch die Klasse von $C(a, 1 - a)$ in $\pi_1(\mathbb{G}_\bullet)$ trivial. $\square$

Korollar 7.15. Für $\mathbb{G}_\bullet = \text{Sing}_\bullet^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}$ erfüllt der Morphismus

$$\mathbb{G}_m \wedge \mathbb{G}_m \rightarrow \pi_1(\mathbb{G}_\bullet, \text{Id}), \quad x \wedge y \mapsto [C_t^\alpha(x, y)]$$

die Steinberg-Relation, d.h. $[C_t^\alpha(a, (1 - a))] = [\text{Id}]$.

8. Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben gesehen, unter der Annahme von Vermutung 6.22, dass die singuläre Auflösung von einfach zusammenhängender Chevalley-Gruppe und zugehöriger Steinberg-Gruppe eine simpliziale Überlagerung ist, deren Faser über dem Basispunkt, also der Kern, die instabile zweite K-Theorie bezüglich des Wurzelsystems ist. Für einen perfekten Körper konnten wir über eine explizite Abbildung, zeigen dass dies die Fundamentalgruppe der singulären Auflösung der Chevalley-Gruppe ist. Damit haben wir eine bereits bekannte Isomorphie neu bewiesen und darüber hinaus alle Schleifen bis auf Homotopie explizit beschrieben.

Der Beweis der Steinberg-Relation für die Abbildung ist nicht durch eine explizite Homotopie in $\mathrm{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}$ gegeben, was sehr zu bedauern ist. Es ist naheliegend, dass sich die Homotopie von Hu und Kriz für simpliziale Gruppen, die $\mathbb{A}^1$ -lokal sind, explizit aufschreiben lässt. Auf der anderen Seite legt der Satz von Hu und Kriz nahe, dass die Steinberg-Relation sich für eine große Klasse linear algebraischer Gruppen verallgemeinern lässt.

Eine andere Möglichkeit, die Steinberg-Relation ohne motivische Homotopietheorie zu zeigen, wäre, Matsumotos Beweis für die Steinberg-Relation zu kopieren. Dazu müsste man ein Analogon der Bruhat-Zerlegung für $\mathrm{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}$ beweisen, also eine Projektion $\nu : \mathbb{G}(k[t]) \twoheadrightarrow N(k[t])$ auf den Normalisator konstruieren, die auf $\mathbb{G}(k)$ der klassischen Bruhat-Zerlegung entspricht.

Die Annahme eines perfekten Körpers diene zur einfacheren Definition reduktiver Gruppen und der Anwendung auf motivische Homotopietheorie. Für Matsumotos Beweis ist lediglich ein unendlicher Körper vonnöten, wobei dies durch van der Kallen auch zu Ringen mit genügend vielen Einheiten verallgemeinert werden konnte.

Weiterhin ließe sich die simpliziale Überlagerung (unter entsprechenden Regularitätsvoraussetzungen an K_2) auch definieren für reguläre lokale Ringe anstelle eines perfekten Körpers.

Um die Klasse untersuchter algebraischer Gruppen zu vergrößern, könnte man zu einfach zusammenhängenden split halbeinfachen oder split reduktiven Gruppen übergehen. Für nicht-split reduktive Gruppen ist eine erste Schwierigkeit, die richtige Definition der elementaren Untergruppe zu finden, wofür die Definition von Petrov und Stavrova [PS08] für isotrope reduktive Gruppen ein guter Kandidat ist, da Stavrova und Luzgarev in [LS09] zeigen konnten, dass diese perfekt ist.

Eine Frage, die sich natürlich im Anschluss stellt, ist die nach der Struktur von $\pi_2(\mathrm{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}(R))$. Nach dem in dieser Arbeit bewiesenen ist diese Gruppe isomorph zu $\pi_2(\mathrm{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathrm{St}(R))$, also mit Hurewicz-Homomorphismus zu $H_3(B \mathrm{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathrm{St}(R), \mathbb{Z})$, also der Gruppenhomologie $H_3(\mathrm{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathrm{St}(R), \mathbb{Z})$. Nach [Ger73, Corollary 3, S. 367] ist $H_3(\mathrm{St}(R), \mathbb{Z}) = K_3(R)$, was man also auch instabil, wenigstens für großen Rang erwarten darf. Damit kommt man zu einer

Vermutung 8.1. *Es ist $\pi_2(\mathrm{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{A}^1} \mathbb{G}(\Phi, R)) \simeq K_3(\Phi, R)$ für ein Wurzelsystem Φ mit hinreichend großem Rang, etwa $\mathrm{rk} \Phi \geq 3$.*

A. Anhang

A.1. Dynkin-Diagramme von Rang ≤ 2

Die folgenden Abbildungen sind *Dynkin-Diagramme*, wobei der griechische Buchstabe α unter einem Knoten eines Diagramms D die entsprechende einfache Wurzel $\alpha \in \Delta(D)$ bezeichnet. Enthält ein Diagramm einen Pfeil, so zeigt dieser in Richtung der kürzeren Wurzel. Enthält ein Diagramm keinen Pfeil, so haben alle Wurzeln die gleiche Länge. Siehe hierzu auch [Bou68].



Abbildung 1: Dynkin-Diagramm von A_1 ($= B_1 = C_1$)



Abbildung 2: Dynkin-Diagramm von $A_1 \times A_1$



Abbildung 3: Dynkin-Diagramm von A_2

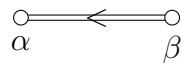


Abbildung 4: Dynkin-Diagramm von C_2 ($= B_2$)

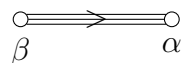
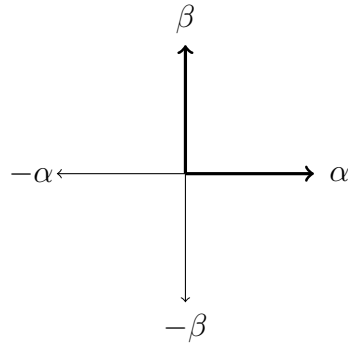


Abbildung 5: Dynkin-Diagramm von G_2

A.2. Wurzelsysteme von Rang 2

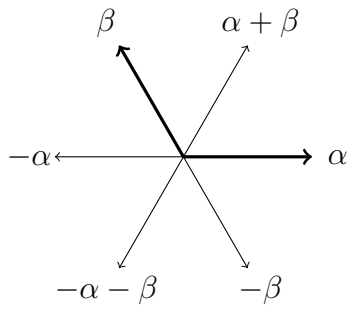
Die folgenden Abbildungen sind Wurzelsysteme vom Rang 2. Dick gezeichnet sind die einfachen Wurzeln, die bereits das Wurzelsystem erzeugen. Die griechischen Buchstaben entsprechen den Bezeichnungen der jeweiligen Dynkin-Diagramme aus Abschnitt A.1.

An den Abbildungen lassen sich Cartan-Zahlen $\alpha\beta^*$ ablesen.



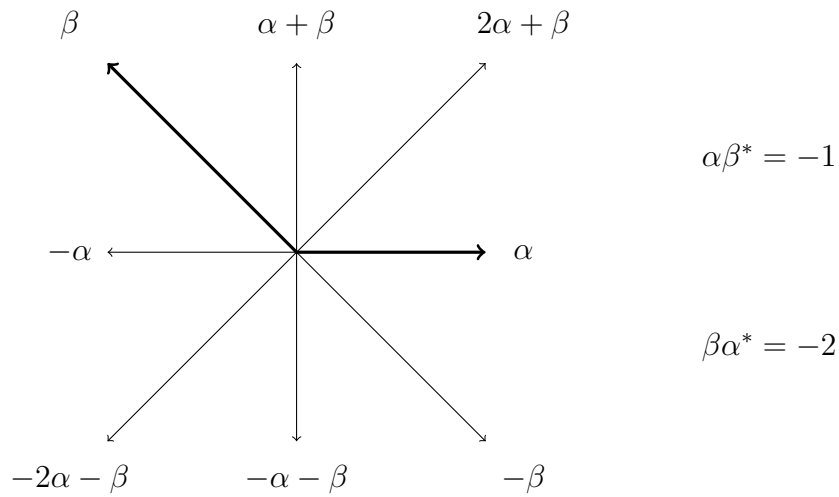
$$\begin{aligned}\alpha\alpha^* &= 2 \\ \alpha\beta^* &= \beta\alpha^* = 0 \\ \alpha(-\alpha)^* &= (-\alpha)\alpha^* = -2\end{aligned}$$

Abbildung 6: Wurzelsystem $A_1 \times A_1$

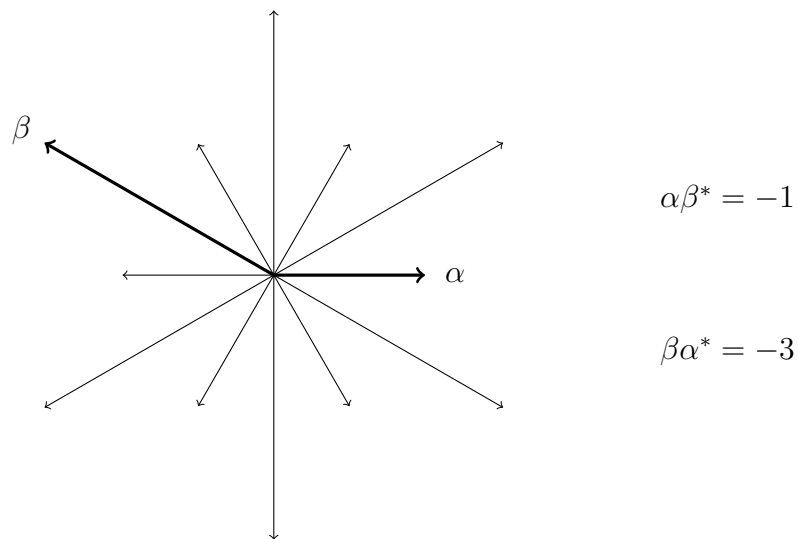


$$\begin{aligned}\alpha(\alpha + \beta)^* &= 1, (\alpha + \beta)\alpha^* = 3 \\ \alpha\beta^* &= -1 = \beta\alpha^* \\ \alpha(-\alpha - \beta)^* &= 1 = (-\alpha - \beta)\alpha^* \\ \alpha(-\beta)^* &= -1, (-\beta)\alpha^* = -3\end{aligned}$$

Abbildung 7: Wurzelsystem A_2


Abbildung 8: Wurzelsystem C_2

Man sieht in Abbildung 8, dass die Wurzeln von C_2 nicht die selbe Länge haben. Die langen Wurzeln bilden ein Unter-Wurzelsystem $A_1 \times A_1$ in C_2 , die kurzen Wurzeln jedoch nicht, da die kurzen Wurzeln α und $(\alpha + \beta)$ sich auf die lange Wurzel $(2\alpha + \beta)$ summieren.


Abbildung 9: Wurzelsystem G_2

A.3. Der Fall $\mathbb{G} = \mathrm{SL}_2$

Die einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe $\mathbb{G} = \mathrm{SL}_2$ ist von Rang 1, mit Wurzelsystem $\Phi = A_1$. Damit ist sie von symplektischem Typ, denn $A_1 = C_1$. Ein maximaler split Torus ist durch Diagonalmatrizen mit Einträgen t, t^{-1} gegeben, eine Borelsche Untergruppe (und damit eine Wahl positiver Wurzeln) durch die oberen Dreiecksmatrizen. Die Wurzel-Untergruppe zur einfachen Wurzel $\{\alpha\} = \Delta$ entspricht Matrizen mit Einträgen auf der ersten Nebendiagonalen. Die Weylgruppe W ist die symmetrische Gruppe S_2 , realisierbar durch Permutationsmatrizen. Wählen wir $\alpha = (1, 2)$, so resultiert daraus (vgl. Diskussion des Lemmas von Whitehead in Abschnitt 6.4)

$$\begin{aligned} x_\alpha(t) &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & x_{-\alpha}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \\ w_\alpha(t) &= \begin{pmatrix} 0 & t \\ t^{-1} & 0 \end{pmatrix}, & h_\alpha(t) &= \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

A.4. Der Fall $\mathbb{G} = \mathrm{SL}_3$

Die einfach zusammenhängende Chevalley-Gruppe $\mathbb{G} = \mathrm{SL}_3$ ist von Rang 2, das Wurzelsystem ist $\Phi = A_2$. Ein maximaler split Torus ist durch Diagonal-Matrizen mit Determinante 1 gegeben. Eine Borelsche Untergruppe ist durch die oberen Dreiecksmatrizen gegeben. Die Wurzel-Untergruppen zu einfachen Wurzeln $\{\alpha, \beta\} = \Delta$ entsprechen Matrizen mit Einträgen auf der ersten Nebendiagonalen. Die Weylgruppe W ist die symmetrische Gruppe S_3 , realisierbar durch Permutationsmatrizen. Wählen wir $\alpha = (1, 2)$ und $\beta = (2, 3)$, so erhalten wir Matrixdarstellungen

$$\begin{aligned} x_\alpha(t) &= \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & x_\beta(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ x_{-\alpha}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & x_{\alpha+\beta}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ w_\alpha(t) &= \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & w_\beta(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \\ h_\alpha(t) &= \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & h_\beta(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A.5. Die Weylgruppen von A_1 , A_2 und C_2

Im Beweis des Satzes von Matsumoto wird eine explizite Beschreibung der Weylgruppen der Wurzelsysteme A_1 , A_2 und C_2 benötigt, an der man die Bruhat-Länge der Elemente ablesen kann.

Beispiel A.1. Wir berechnen nun für gewisse Wurzelsysteme Φ mit Wahl positiver Wurzeln $\Phi^+ \subset \Phi$ und einfacher Wurzeln $\Delta \subset \Phi^+$ (wie in Abschnitt A.2) die Weylgruppe $W = W(\Phi)$ über Satz 3.10 als $W = \langle \sigma_\alpha : \alpha \in \Delta \rangle$, wobei wir also hier mit σ_α die Spiegelung zur einfachen Wurzel α bezeichnen.

- $\Phi = A_1$, $\Phi^+ = \{\alpha\}$, $\Delta = \{\alpha\}$

$$\implies W(A_1) = \{\text{id}, \sigma_\alpha\}.$$

- $\Phi = A_2$, $\Phi^+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$, $\Delta = \{\alpha, \beta\}$

$$\implies W(A_2) = \{\text{id}, \sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\alpha\sigma_\beta, \sigma_\beta\sigma_\alpha, \sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\alpha\}$$

wobei $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ als positive Rotation um 120° operiert mit Inversem $\sigma_\beta\sigma_\alpha$ und $\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha+\beta} = \sigma_\beta\sigma_\alpha\sigma_\beta$ ist.

- $\Phi = C_2$, $\Phi^+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta\}$, $\Delta = \{\alpha, \beta\}$

$$\implies W(C_2) = \{\text{id}, \sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\beta\sigma_\alpha, \sigma_\alpha\sigma_\beta, \sigma_\beta\sigma_\alpha\sigma_\beta, \sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\alpha, \sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\alpha\sigma_\beta\}$$

wobei $\sigma_\beta\sigma_\alpha$ als positive Rotation um 90° operiert mit Inversem $\sigma_\alpha\sigma_\beta$. Das Quadrat $\sigma_\beta\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\alpha = \sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\alpha\sigma_\beta$ operiert involutiv als Rotation um 180° . Des Weiteren sind $\sigma_\beta\sigma_\alpha\sigma_\beta = \sigma_{\alpha+\beta}$ und $\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\alpha = \sigma_{2\alpha+\beta}$ involutive Elemente.

Im Hinblick auf die darauf folgende Proposition betrachten wir noch eine explizite Rechnung.

Beispiel A.2. Wir betrachten alle Elemente der Weylgruppe $W(\Phi)$, welche für $\alpha \neq \beta \in \Delta$ die Wurzel β auf $\pm\alpha$ abbilden:

- $\Phi = A_1$, dann gibt es kein $\beta \neq \alpha$, also auch kein $\sigma \in W$ mit $\sigma(\beta) = \pm\alpha$.
- $\Phi = A_2$, dann bildet $\sigma_\beta\sigma_\alpha$ die Wurzel β auf $+\alpha$ ab, hingegen $\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\alpha$ auf $-\alpha$. Keine anderen Elemente von W bilden β auf $\pm\alpha$ ab.
- $\Phi = C_2$, dann gibt es kein Element $\sigma \in W$ mit $\sigma(\beta) = \pm\alpha$.

B. Notationsindex

Symbol	Beschreibung	Referenz	Seite
$\rtimes^c$	getwistetes semidirektes Produkt	2.10	7
$D(G)$	derivierte Untergruppe	2.15	11
K_2^M	zweite Milnor-K-Theorie	2.31	15
$\{a, b\}$	Erzeuger von $K_2^M(k)$	2.31	15
K_2^{Sp}	zweite symplektische K-Theorie	2.33	16
$\llbracket a, b \rrbracket$	Erzeuger von K_2^{Sp}	2.33	16
Φ	Wurzelsystem (stets reduziert)	3.8	22
Φ^+	Wahl positiver Wurzeln	3.8	22
Δ	Wahl einfacher Wurzeln	3.8	22
x_α	Elementarmatrix zur Wurzel α in $\mathbb{G}$	3.17	25
$E(\mathbb{G})$	elementare Untergruppe	3.17	25
$\text{St}(\Phi, R)$	R -Punkte der Steinberggruppe von $\mathbb{G}(\Phi)$	3.31	28
$K_2(\Phi, R)$	Kern von $\text{St}(\Phi, R) \rightarrow \mathbb{G}(\Phi, R)$	3.31	28
$\tilde{x}_\alpha$	Lift von x_α in eine Erweiterung	4.1	31
U^+	von $U^\alpha(k)$ für $\alpha \in \Phi^+$ erzeugt	4.3	31
$S(G, A)$	Steinberg-Kozykel $G \times G \rightarrow A$	4.6	32
$S^\circ(G, A)$	bilineare Steinberg-Kozykel $G \times G \rightarrow A$	4.7	32
$\mathcal{N}$	$\mathbb{Z}$ -Punkte des Normalisators des gewählten Torus	4.3.3	45
$\tilde{\mathcal{N}}$	zyklische Erweiterung von $\mathcal{N}$	4.23	45
$\tilde{\mathcal{H}}$	von $\tilde{h}$ erzeugte Untergruppe in $\tilde{\mathcal{N}}$	4.23	45
$\tilde{H}$	$A \rtimes^c H$	4.22	44
N^*	$\tilde{H} \rtimes_\theta \tilde{\mathcal{N}}$	4.25	49
$\tilde{N}$	Quotient von N^* nach Relation $\tilde{h} = j(\tilde{h})$	4.26	49
S	$\tilde{N} \times_N \mathbb{G}(k)$ (verklebt via Bruhat-Zerlegung)	4.27	50
Λ	Von $\{\lambda_\alpha \alpha \in \Delta\}$ erzeugte Gruppe	4.27	50
E	$\lambda(\tilde{H}) \cup \lambda(U^+) \cup \Lambda$, operiert auf S	4.27	50
Δ	Ordinalzahlkategorie	5.11	66
Δ^n	n -ter Standardsimplex	5.12	66
Λ_k^n	k -tes Horn in Δ^n	5.14	67
S^n	n -te simpliziale Sphäre $\Delta^n / \partial \Delta^n$	5.14	67
$PX_\bullet$	punktierter simplizialer Pfadraum von $X_\bullet$	5.15	67
$\Omega X_\bullet$	punktierter simplizialer Schleifenraum von $X_\bullet$	5.15	67
$X_t^\alpha(s)$	linearer Weg $x_\alpha(ts)$ in $\mathbb{G}(k[t])$ mit $s \in k^\times$	6.31	84
$C_t^\alpha(x, y)$	ausgezeichnete Schleife in $\mathbb{G}(k)$	6.33	85

Konventionen

An gewisse Konventionen der Notation, die auch im Text an den entsprechenden Stellen erwähnt werden, sei hier nochmal erinnert:

Der Buchstabe k bezeichnet in der Regel einen perfekten Körper, der Buchstabe R einen Ring. Ringe sind in dieser Arbeit immer kommutative, assoziative Ringe mit 1.

Wir notieren Gruppen, wenn nicht anders angegeben, multiplikativ mit neutralem Element 1. Linear algebraische Gruppen haben neutrales Element und Basispunkt Id. Kommutatoren notieren wir $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ und Konjugation gelegentlich mit $\text{Ad}(x)(y) = xyx^{-1}$.

Homotopieklassen $[\gamma_t]$ von Elementen γ_t einer simplizialen Menge mit Basispunkt sind stets als Homotopieklassen bezüglich den Basispunkt erhaltender Homotopien (d.h. relativ $t = 0$) zu verstehen, wenn nicht explizit anders angegeben. Ebenso bezeichnet das Symbol $\approx$ stets die Homotopierelation bezüglich Basispunkt-erhaltender Homotopien. Bei Schleifen bezeichnet $\approx$ die Homotopierelation für π_1 , also ist $\omega_t \approx \omega'_t \Leftrightarrow [\omega_t] = [\omega'_t] \in \pi_1$.

Der Verweis “Matsumoto, 1.1” hinter einem Lemma oder einem Satz verweist auf den entsprechenden Paragraphen in [Mat69].

Wegweiser

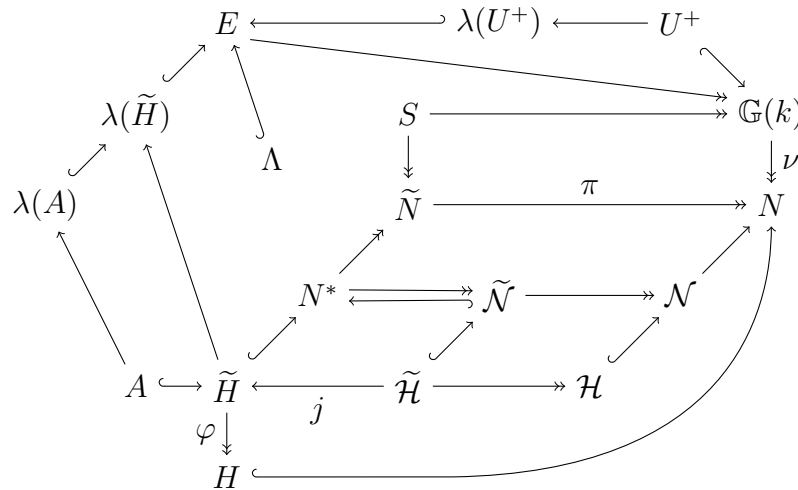


Abbildung 10: Wegweiser durch Matsumotos Konstruktion einer Erweiterung E zu einem vorgegebenen Kozykel $c \in S(k, A)$.

Literatur

- [Abe69] ABE, Eiichi: Chevalley groups over local rings. In: *Tôhoku Mathematical Journal. Second Series* 21 (1969), S. 474–494. – MR:0258837. DOI:10.2748/tmj/1178242958
- [Abe83] ABE, Eiichi: Whitehead groups of Chevalley groups over polynomial rings. In: *Communications in Algebra* 11 (1983), Nr. 12, 1271–1307. – MR:697617. DOI:10.1080/00927878308822906
- [BG73] BROWN, Kenneth S.; GERSTEN, Stephen M.: Algebraic K -theory as generalized sheaf cohomology. MR:0347943. DOI:10.1007/BFb0067062. In: *Algebraic K-theory, I: Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 341*. Berlin : Springer, 1973, 266–292
- [Bou68] BOURBAKI, Nicolas: *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie*. Paris : Elements de Mathématique, 1968 MR:0240238
- [BT65] BOREL, Armand; TITS, Jacques: Groupes réductifs. In: *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* (1965), Nr. 27, S. 55–150. MR:0207712
- [Coh66] COHN, P. M.: On the structure of the GL_2 of a ring. In: *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* (1966), Nr. 30, S. 5–53. MR:0207856
- [DS95] DWYER; SPALINSKI: *Homotopy theories and model categories*. <http://hopf.math.purdue.edu/Dwyer-Spalinski/theories.pdf>. Version:1995
- [EH62] ECKMANN, B.; HILTON, P. J.: Group-like structures in general categories. I. Multiplications and comultiplications. In: *Mathematische Annalen* 145 (1961/1962), S. 227–255. – MR:0136642. DOI:10.1007/BF01451367
- [Ger73] GERSTEN, S. M.: K_3 of a ring is H_3 of the Steinberg group. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 37 (1973), S. 366–368. MR:0320114
- [GJ99] GOERSS, Paul G.; JARDINE, John F.: *Progress in Mathematics*. Bd. 174: *Simplicial homotopy theory*. Basel : Birkhäuser Verlag, 1999 MR:1711612
- [Har77] HARTSHORNE, Robin: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 52: *Algebraic geometry*. New York : Springer-Verlag, 1977 MR:0463157

- [Hir03] HIRSCHHORN, Philip S.: *Mathematical Surveys and Monographs*. Bd. 99: *Model categories and their localizations*. Providence, RI : American Mathematical Society, 2003 MR:1944041
- [HK01] HU, Po; KRIZ, Igor: The Steinberg relation in $\mathbb{A}^1$ -stable homotopy theory. In: *International Mathematics Research Notices* 17 (2001), 907–912. – MR:1859344. DOI:10.1155/S1073792801000447
- [HK11] HENRIQUES, André; KALLEN, Wilberd v. d.: *Universal cover of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$: does it admit central extensions?* MathOverflow, abgerufen am 2.5.2011. <http://mathoverflow.net/questions/63529>. Version: 2011
- [Hop42] HOPF, Heinz: Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe. In: *Commentarii Mathematici Helvetici* 14 (1942), Nr. 1, S. 257–309. – MR:0006510. DOI:10.5169/seals-14307
- [Hor05] HORNBOSTEL, Jens: $\mathbb{A}^1$ -representability of Hermitian K -theory and Witt groups. In: *Topology* 44 (2005), Nr. 3, 661–687. – MR:2122220. DOI:10.1016/j.top.2004.10.004
- [Hov99] HOVEY, Mark: *Mathematical Surveys and Monographs*. Bd. 63: *Model categories*. Providence, RI : American Mathematical Society, Providence, RI, 1999 MR:1650134. – successor of: Preprint, April 10, 2000, K -theory Preprint Archives, reprinted: 2007
- [Hut90] HUTCHINSON, Kevin: A new approach to Matsumoto’s theorem. In: *K-Theory* 4 (1990), Nr. 2, S. 181–200. – MR:1081659. DOI:10.1007/BF00533156
- [Jar83] JARDINE, J.F.: On the homotopy groups of algebraic groups. In: *Journal of Algebra* 81 (1983), Nr. 1, 180–201. – MR:696133. DOI:10.1016/0021-8693(83)90215-6
- [Jar00] JARDINE, J. F.: Motivic symmetric spectra. In: *Doc. Math.* 5 (2000), S. 445–553 (electronic). MR:1787949
- [Kal76] KALLEN, Wilberd v. d.: Injective stability for K_2 . MR:0506636. In: STEIN, Michael R. (Hrsg.): *Algebraic K-theory (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1976)*. Berlin : Springer, 1976 (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 551), S. 77–154. Lecture Notes in Math., Vol. 551
- [Kal77a] KALLEN, Wilberd v. d.: Another presentation for Steinberg groups. In: *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 80 39 (1977), Nr. 4, S. 304–312. MR:0463263

- [Kal77b] KALLEN, Wilberd v. d.: The K_2 of rings with many units. In: *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série* 10 (1977), Nr. 4, 473–515. MR:0506170. Numdam:ASENS_1977_4_10_4_473_0
- [Ker70] KERVAIRE, Michel A.: Multiplicateurs de Schur et K-théorie. MR:0274558. In: *Essays on Topology and Related Topics (Mémoires dédiés à Georges de Rham)*. New York : Springer, 1970, S. 212–225
- [Ker75] KEUNE, Frans: $(t^2 - t)$ -reciprocities on the affine line and Matsumoto's theorem. In: *Inventiones Mathematicae* 28 (1975), 185–192. – MR:0392927. DOI:10.1007/BF01436072
- [KMS75] KALLEN, Wilberd v. d.; MAAZEN, Hendrik ; STIENSTRA, Jan: A presentation for some $K_2(n, R)$. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 81 (1975), Nr. 5, S. 934–936. MR:0376818
- [Lam06] LAM, Tsit-Yuen: *Serre's Problem on Projective Modules*. Springer-Verlag, 2006 MR:2235330. DOI:10.1007/978-3-540-34575-6
- [LS09] LUZGAREV, A.; STAVROVA, A.: Elementary subgroup of an isotropic reductive group is perfect. (2009), Januar. arXiv:1001.1105v1
- [Mac71] MAC LANE, Saunders: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 5: *Categories for the working mathematician*. New York : Springer-Verlag, 1971 MR:0354798
- [Mat69] MATSUMOTO, Hideya: Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés. In: *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série* 2 (1969), 1–62. MR:39:1566. Numdam:ASENS_1969_4_2_1_1_0
- [May92] MAY, J. P.: *Simplicial objects in algebraic topology*. Chicago, IL : University of Chicago Press, 1992 (Chicago Lectures in Mathematics). MR:1206474. – Reprint of the 1967 original
- [Mil70] MILNOR, John W.: Algebraic K -theory and quadratic forms. In: *Inventiones Mathematicae* 9 (1970), S. 318–344. – MR:0260844. DOI:10.1007/BF01425486
- [Mil71] MILNOR, John W.: *Introduction to algebraic K-theory*. Princeton, N.J. : Princeton University Press, 1971 MR:0349811. – Annals of Mathematics Studies, No. 72

- [Mil80] MILNE, James S.: *Princeton Mathematical Series*. Bd. 33: *Étale cohomology*. Princeton, N.J. : Princeton University Press, 1980. – xiii+323 S. MR:559531
- [MM92] MAC LANE, Saunders; MOERDIJK, Ieke: *Sheaves in geometry and logic ... a first introduction to topos theory*. Springer-Verlag, 1992
- [Moo68] MOORE, Calvin C.: Group extensions of p -adic and adelic linear groups. In: *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* 35 (1968), 157–222. MR:0244258. Numdam:PMIHES_1968__35__5_0
- [Mor07] MOREL, Fabien: *A1-homotopy classification of vector bundles over smooth affine schemes*. preprint. <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~morel/bgln.pdf>. Version: 2007
- [Mos] MOSER, Lukas-Fabian: $\mathbb{A}^1$ -locality results for linear algebraic groups, Ludwig-Maximilians-Universität München, Dissertation. <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~lfmoser/>. – in Vorbereitung.
- [MR90] MORITA; REHMANN: a Matsumoto-type theorem for Kac-Moody groups. In: *Tohoku Math. J.* 42 (1990), S. 537–560
- [MV99] MOREL, Fabien; VOEVODSKY, Vladimir: $\mathbb{A}^1$ -homotopy theory of schemes. In: *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* 90 (1999), Nr. 90, 45–143. MR:1813224. Numdam:PMIHES_1999__90__45_0
- [Nis] NISNEVICH, Y.: *Bibliography on the Completely Decomposed Topology and its applications*. web. <http://cims.nyu.edu/~nisnevic/articles/NTC1.pdf>
- [PS08] PETROV, V. A.; STAVROVA, A. K.: Elementary subgroups in isotropic reductive groups. In: *Algebra i Analiz* 20 (2008), Nr. 4, 160–188. – MR:2473747. DOI:10.1090/S1061-0022-09-01064-4
- [Qui67] QUILLEN, Daniel G.: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 43: *Homotopical algebra*. Berlin : Springer-Verlag, 1967 MR:0223432
- [Qui72] QUILLEN, Daniel: On the Cohomology and K -Theory of the General Linear Groups Over a Finite Field. In: *Annals of Mathematics. Second Series* 96 (1972), Nr. 3, S. 552–586. MR:0315016
- [Qui73] QUILLEN, Daniel: Higher algebraic K -theory. I. MR:0338129. In: *Algebraic K-theory, I: Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*. Berlin : Springer, 1973, S. 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341

- [Reh78] REHMANN, Ulf: Zentrale Erweiterungen der speziellen linearen Gruppe eines Schiefkörpers. In: *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 301 (1978), 77–104. – MR:506073. DOI:10.1515/crll.1978.301.77
- [Spr09] SPRINGER, T.A.: *Linear algebraic groups*. Zweite Auflage. Boston, MA : Birkhäuser Boston Inc., 2009 (Modern Birkhäuser Classics). MR:2458469
- [Ste62] STEINBERG, Robert: Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques. In: *Colloque Théorie des groupes algébriques, Bruxelles*, Librairie Universitaire, Louvain, 1962, S. 113–127. MR:0153677
- [Ste71] STEIN, Michael R.: Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings. In: *American Journal of Mathematics* 93 (1971), S. 965–1004. – MR:0322073. DOI:10.2307/2373742
- [Sus77] SUSLIN, A. A.: On the structure of the special linear group over polynomial rings. In: *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya* 41 (1977), Nr. 2, S. 235–252, 477. MR:0472792
- [Sus87] SUSLIN, A. A.: Torsion in K_2 of fields. In: *K-Theory* 1 (1987), Nr. 1, 5–29. – MR:899915. DOI:10.1007/BF00533985
- [Tot92] TOTARO, Burt: Milnor K -theory is the simplest part of algebraic K -theory. In: *K-Theory* 6 (1992), Nr. 2, 177–189. – MR:1187705. DOI:10.1007/BF01771011
- [Voe10] VOEVODSKY, Vladimir: Homotopy theory of simplicial sheaves in completely decomposable topologies. In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 214 (2010), Nr. 8, 1384–1398. – MR:2593670. DOI:10.1016/j.jpaa.2009.11.004
- [Vor81] VORST, Ton: The general linear group of polynomial rings over regular rings. In: *Communications in Algebra* 9 (1981), Nr. 5, 499–509. – MR:606650. DOI:10.1080/00927878108822596
- [Wei] WEIBEL, Charles A.: *The K-book: An introduction to algebraic K-theory*. <http://www.math.rutgers.edu/~weibel/Kbook.html>
- [Wei95] WEIBEL, Charles A.: *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Bd. 38: *An introduction to homological algebra*. 2nd revised edition. Cambridge : Cambridge University Press, 1995 MR:1269324
- [Wen10] WENDT, Matthias: $\mathbb{A}^1$ -Homotopy of Chevalley Groups. In: *Journal of K-Theory* 5 (2010), Nr. 2, 245–287. – MR:2640204. DOI:10.1017/is010001014jkt096